

任意区域的网格自动生成和任意高阶有限元方法

献给姜礼尚教授 90 华诞

陈志明*, 刘勇

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: zmchen@lsec.cc.ac.cn, yongliu@lsec.cc.ac.cn

收稿日期: 2023-02-26; 接受日期: 2023-04-19; 网络出版日期: 2023-07-07; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11831016, 12288201 和 12201621) 和科技部重点研发专项 (批准号: 2019YFA0709600) 资助项目

摘要 本文首先简要介绍非拟合网格有限元方法求解复杂区域上椭圆问题的发展现状. 然后结合最近本文作者发展的非拟合网格有限元方法, 针对二阶椭圆方程提出一种任意光滑区域上的任意高阶协调有限元方法. 本文在带悬点的 Cartesian 网格上自动生成诱导网格, 在诱导网格上构造协调的高阶有限元空间, 采用 Nitsche 技术处理 Dirichlet 边界条件, 并证明方法的适定性和 hp 先验误差估计. 数值算例验证了本文的理论结果.

关键词 非拟合网格有限元 hp 先验误差估计 网格自动生成

MSC (2020) 主题分类 65N30

1 引言

偏微分方程的数值方法已经被广泛应用于解决科学和工程中的实际问题, 然而实际应用问题往往面临复杂环境和几何形状的描述, 如多物理场的耦合问题、飞机的外形设计和光刻模拟等. 近年来, 学者们对于求解具有复杂变化的几何区域模型问题有着广泛的研究. 贴体网格有限元方法 (finite element method, FEM) 为了刻画区域的几何形状, 要求有限元网格单元的顶点落在区域边界上 (参见文献 [2, 24, 29]). 对于复杂的几何区域, 构造满足形状正则 (shape regular) 的贴体有限元网格可能非常困难且耗时, 因此学者们发展了非拟合网格有限元方法来处理具有复杂几何边界或界面的问题. 非拟合网格有限元方法已经在许多问题中得到广泛的应用, 如具有移动界面的多相流和多物理场问题 [35, 48]、流固耦合问题 [42] 和椭圆界面问题 [14, 25, 34, 50, 51] 等.

使用非拟合网格的有限元方法有许多种. 例如, 扩展有限元方法 [3, 9] (extended finite element method, XFEM) 通常用于求解裂缝问题. 而使用简单规则的背景网格 (通常为 Cartesian 网格) 方法有浸入边界方法 [44]、浸没有限元方法 (immersed finite element method, IFEM) [28, 39–41]、切割有限

英文引用格式: Chen Z, Liu Y. An arbitrarily high-order finite element method on arbitrarily shaped domains with automatic mesh generation (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1–18, doi: [10.1360/SSM-2023-0042](https://doi.org/10.1360/SSM-2023-0042)

元方法 (cut finite element method, CutFEM) [16–18, 34]、杂交高阶 (hybrid high-order, HHO) 法 [15, 19] 和聚合非拟合有限元法 (aggregated unfitted FEM) [7] 等. 虽然非拟合网格有限元方法避免了生成拟合网格的困难, 但是要构造高阶的有限元方法仍然需要实质性的新想法. 事实上, 非拟合网格有限元方法的一个主要困难是所谓的小单元问题, 也就是由于界面或区域边界可以任意地与背景网格相交, 导致产生任意小或者各向异性的切割单元, 使得有限元方法的刚度矩阵条件数变得非常大, 例如达到 10^{30} , 从而导致数值不稳定 (参见文献 [7, 31]).

文献中主要有两种方法处理小单元问题, 一种方法是在变分形式中添加合适的稳定化项 (参见文献 [20, 21, 33, 43, 50, 51]), 例如一种常见的方法是增加鬼罚 (ghost penalty) 项 (参见文献 [20, 21, 33]), 通过增加界面单元的边或面上高阶导数的跳跃, 惩罚界面小单元带来的不稳定性. 这种方法对于标准的低阶 C^0 有限元是一种方便的解决方案; 但是对于高阶元, 或者方程含有不同的微分算子, 设计这种鬼罚项变得困难且增加计算成本 (参见文献 [22]). 另一种方法是通过合并小单元及其邻居组成宏单元 (参见文献 [7, 15, 25, 36, 38]), 使得宏单元有足够大的支集. 不同的合并方式会产生各种形状的宏单元, 因此这种方法适用于网格形状要求比较低的有限元方法, 例如, 在间断有限元的框架下, 该方法比较容易实现 (参见文献 [25, 36, 38]). 但间断有限元方法与协调有限元方法相比, 增加了自由度, 引入了非协调误差, 需要在单元边界增加合适的罚项获得稳定性和最优收敛阶. Badia 等 [5, 7] 通过构造稳定的延拓算子使得有限元空间仍然保持 C^0 , 但是该稳定化的延拓算子的误差估计还需要严格的数学证明. 最近, Burman 等 [23] 基于样条空间上的延拓算子给出了稳定性及 h 版本的误差估计. 有关合并单元的非拟合有限元方法与鬼罚方法之间的讨论可参见文献 [5, 6, 13, 22].

近年来, Chen 等 [25] 基于局部间断有限元 (local discontinuous Galerkin, LDG) 框架提出了一种自适应非拟合网格有限元方法, 基于新颖的曲边单元上的反估计和界面偏差的概念, 获得了 hp 版本的先验和后验误差估计, 首次显式地刻画了界面几何形状和多项式次数在误差中的影响. 在文献 [25] 中, 小单元的合并方式要求宏单元必须是矩形, 这个要求使得宏单元的构造变得困难. 最近, Chen 和 Liu [26] 在二维情形下, 设计了一种可靠的单元合并算法, 对于任意光滑界面证明了算法能够在有限步完成所有小单元的合并. 由于宏单元是矩形, 并且根据大单元的特殊定义, 该算法事实上可以自动生成一个二维形状正则的混合贴体有限元网格, 其中包含矩形、三角形和曲边三角形. 此外在间断有限元的框架下, 基函数的选取对于刚度矩阵条件数也会带来很大的影响. 对于界面单元, 选取正交基函数将会大大减少条件数的量级 (参见文献 [26]).

本文将推广文献 [25] 中的方法, 利用文献 [26] 中构造的形状正则混合贴体网格, 定义任意高阶 C^0 协调有限元空间, 使得有限元解跨过单元的直边是连续的. 对于曲边边界, 采用 Nitsche 技术 [8, 45], 将 Dirichlet 边界条件通过提升算子弱耦合地体现在变分形式中. 与间断有限元方法相比, 非拟合网格协调有限元方法不仅自由度减少了, 而且有限元的变分形式中不再需要单元直边上的惩罚项就能获得最优误差估计. 这种想法最近也被用在波动方程的界面问题上 (参见文献 [27]). 注意到由于文献 [26] 中的网格是混合型网格并且单元直边上允许含有悬点, 我们证明这种混合型网格满足兼容性条件 (参见定理 2.1), 因此可以利用 hp 有限元处理悬点的方法 [32] 构造有限元形函数保持整体的协调性. 我们对于任意光滑区域上的边值问题给出离散格式, 并证明数值解的适定性和 hp 先验误差估计. 推广我们的格式至 3 维问题是直接的, 但是如何构造 3 维的小单元合并算法, 生成满足形状正则的混合贴体网格是非常具有挑战性的, 这将作为我们未来的研究工作.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节给出非拟合网格的协调有限元方法. 第 3 节证明非拟合网格协调有限元方法的适定性和 hp 先验误差估计. 第 4 节介绍非拟合网格协调有限元的基函数构造. 第 5 节介绍常系数 Dirichlet 边值问题和混合边值问题的数值算例, 以此验证本文的理论结果.

2 非拟合网格的协调有限元方法

为简单起见，考虑如下线性椭圆边值问题：

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (2.1)$$

$$u = g_D, \quad \text{在 } \Gamma_D \text{ 上}, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_N, \quad \text{在 } \Gamma_N \text{ 上}, \quad (2.2)$$

其中， $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 是一个有界 C^2 光滑区域， $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ 表示区域 Ω 的边界， $a \in C(\bar{\Omega})$, $a \geq a_0 > 0$, $f \in L^2(\Omega)$, $g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $g_N \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$, \mathbf{n} 表示区域 Ω 的单位外法线方向。边值问题 (2.1) 和 (2.2) 的弱形式为：求解 $u \in H^1(\Omega)$ 使得 $u|_{\Gamma_D} = g_D$, 并且

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g_N v ds, \quad \forall v \in V_0, \quad (2.3)$$

其中 $V_0 = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}$. 假设 Γ_D 测度非零，于是 (2.3) 存在唯一解。

2.1 诱导网格的自动生成

本小节回顾诱导网格的自动生成算法（参见文献 [26, 算法 6]）。首先使用均匀的 Cartesian 网格 \mathcal{T}_0 覆盖区域 Ω , 如图 1(a) 所示。令 \mathcal{T} 表示由 \mathcal{T}_0 经过局部单元四分加密 (quad refinements) 方式生成的允许含有悬点的 Cartesian 网格, 如图 1(b) 所示。要求每个单元 $K \in \mathcal{T}$ 至多被边界 Γ 交于两条不同的边 (包括顶点)。由于边界 Γ 可以任意地与网格单元相交, 因此会产生任意形状各向异性的小单元, 导致有限元离散的矩阵条件数过大无法进行计算。为此, 我们希望由网格 \mathcal{T} 通过单元合并的方式生成一个诱导网格 (induced mesh) \mathcal{M} , 使得诱导网格不含有小单元。首先给出大单元和小单元的概念。

定义 2.1 如果单元 $K \subset \Omega$ 或者 $K \in \mathcal{T}^\Gamma := \{K \in \mathcal{T} : K \cap \Gamma \neq \emptyset\}$ 为边界单元, 存在 $\delta_0 \in (0, \frac{1}{2})$ 使得对于 K 的任意一条与 Ω 相交非空的边 e , 满足 $|e \cap \Omega| \geq \delta_0 |e|$, 其中 $|e|$ 表示边 e 的长度, 则称单元 K 为大单元, 否则称单元 K 为小单元。

由定义 2.1 可知小单元 K 只能是边界单元。对于任意 $K \in \mathcal{T}$, 令 h_K 表示 K 的直径, 则对于边界单元, 作如下假设。

假设 2.1 对于任意一个边界单元 $K \in \mathcal{T}^\Gamma$, 存在一个包含 K 的矩形宏单元 $M(K)$, 它由单元 K 及其周围邻居单元组成, 使得宏单元 $M(K)$ 是大单元, 并且 $h_{M(K)} \leq C_0 h_K$, 其中 C_0 为某个固定的常数。

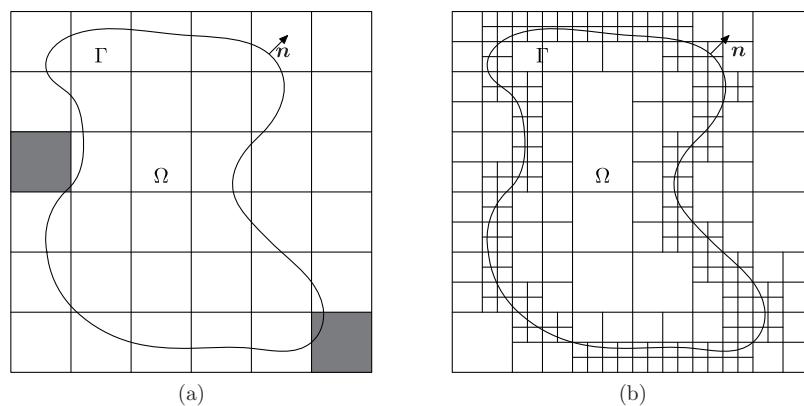


图 1 边值问题的非拟合网格 \mathcal{T}_0 (a) 和 \mathcal{T} (b) 示例

对于 C^2 光滑的边界, 可以给出一种小单元合并的算法使得边界单元满足假设 2.1. 该算法是基于边界单元的可行链的概念, 将合并单元组成的模块进行分类, 然后通过合适的合并顺序生成宏单元. 接下来, 给出可行链的概念和 5 种类型的合并单元模块.

由于边界 Γ 只能与 $K \in \mathcal{T}$ 交于两条不同的边 (包括顶点), 因此只有 4 种边界与单元相交的可能方式, 如图 2 所示. 令 \mathcal{T}_1 表示形如图 2(a) 所示的所有边界单元组成的集合, 记为第一类型边界单元; \mathcal{T}_2 表示形如图 2(b) 和 2(c) 所示的所有边界单元组成的集合, 记为第二类型边界单元; 最后 \mathcal{T}_3 表示形如图 2(d) 所示的所有边界单元组成的集合, 记为第三类型边界单元. 根据定义 2.1, 所有属于 \mathcal{T}_3 的单元都是大单元. 因此只需考虑集合 \mathcal{T}_1 和 \mathcal{T}_2 中小单元的合并.

所谓一条边界单元组成的链指的是 n 个边界单元 $G_i \in \mathcal{T}^\Gamma$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 有序地组成 $\mathfrak{C} = \{G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow \dots \rightarrow G_n\}$, 使得 $\bar{\Gamma}_{G_i} \cup \bar{\Gamma}_{G_{i+1}}$ 构成一条连续的曲线 ($1 \leq i \leq n-1$). 称 n 为链 \mathfrak{C} 的长度, 令 $\mathfrak{C}\{i\} = G_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

对于任意一个单元 $K \in \mathcal{T}$, 令 $N(K)$ 表示 K 的邻居单元, 即 $N(K) \in \mathcal{T}$ 与 K 有一条公共边; 令 $D(K)$ 表示 K 的对角单元, 即 $D(K) \in \mathcal{T}$ 只与 K 有一个公共顶点. 记集合 $\mathcal{S}(K)_0 = \{K\}$, 对于 $j \geq 1$, 定义 $\mathcal{S}(K)_j = \{K'' \in \mathcal{T} : \text{存在 } K' \in \mathcal{S}(K)_{j-1} \text{ 使得 } \bar{K}'' \cap \bar{K}' \neq \emptyset\}$, 即 $\mathcal{S}(K)_j$ 表示以 K 为中心周围第 k 层单元组成的集合 ($0 \leq k \leq j$). 显然, $\mathcal{S}(K)_0 \subset \mathcal{S}(K)_1 \subset \dots \subset \mathcal{S}(K)_j$, $j \geq 1$. 则一条可行链的定义如下.

定义 2.2 如果一条边界单元的链 \mathfrak{C} 满足如下 4 条规则, 则称该链为可行链.

- (1) 对于任意 $K \in \mathfrak{C}$, 所有 $\mathcal{S}(K)_2$ 中的单元大小与 K 一致;
- (2) 如果 $K \in \mathfrak{C}$ 有一条边 e 使得 $\bar{e} \subset \Omega$, 则 e 必须是某个邻居单元 $N(K) \subset \Omega$ 的边;
- (3) 任意一个非边界单元 $K \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^\Gamma$ 至多有两个邻居单元为边界单元;
- (4) 如果 $K \subset \Omega$, 则在 $\mathcal{S}(K)_j$ ($j = 1, 2$) 中的边界单元必须连通, 即闭集合 $\cup \{\bar{G} : G \in \mathcal{S}(K)_j \cap \mathcal{T}^\Gamma\}$ 的内部构成连通的区域.

在边界附近单元进行适当的局部加密, 就很容易使得边界单元的链 \mathfrak{C} 满足以上 4 条规则. 引入这些规则的准则是保证在每个边界单元附近有足够的非边界单元, 以便合并算法能够执行成功. 更多关于这些规则的细节可参见文献 [26].

合并单元的模块是由链 \mathfrak{C} 的子链及其某些邻居单元和对角单元组成的. 本文介绍 5 种类型的合并单元模块 (如图 3 和 4 所示). 例如类型 1 模块 (参见图 3(a)), 它由 3 个边界单元的子链构成, $N(K)_1$ 、 K 和 $N(K)_2$ 分别属于集合 \mathcal{T}_2 、 \mathcal{T}_1 和 \mathcal{T}_2 . 由该模块生成的矩形宏单元 M 包含边界单元 $N(K)_1$ 、 K 和 $N(K)_2$ 并且 M 为大单元. 考察边 e_1 的长度 $|e_1|$ 和 e_2 的长度 $|e_2|$, 如果它们都是长边, 则 M 由 $N(K)_1$ 、 K 、 $N(K)_2$ 和 $D(K)_1$ 组成. 如果 $|e_1|$ 小但 $|e_2|$ 大, 则 M 由单元

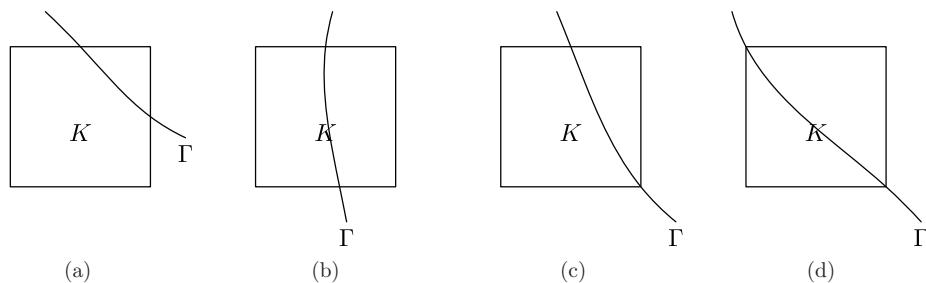


图 2 不同类型的边界单元. 第二种类型单元包括 (b) 和 (c)

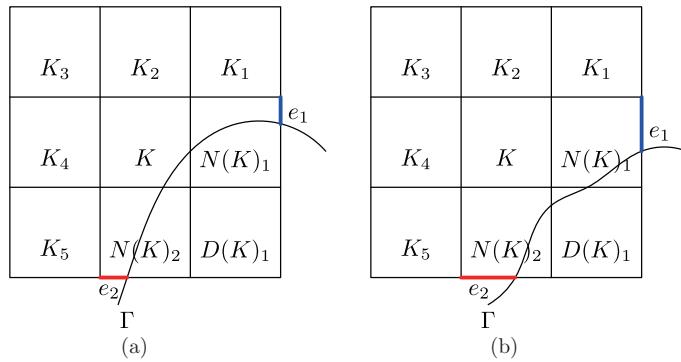


图 3 (网络版彩图) 类型 1 (a) 和类型 2 (b) 模块的示例

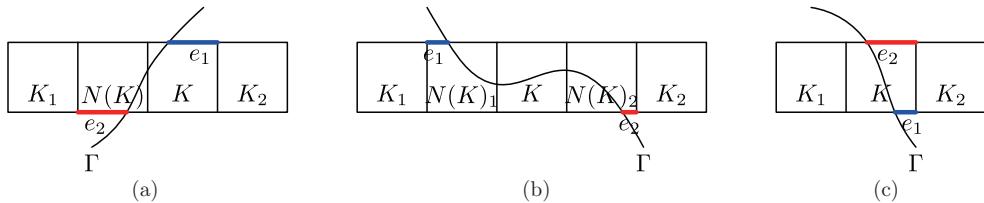


图 4 (网络版彩图) 类型 3 (a)、类型 4 (b) 和类型 5 (c) 模块的示例

$N(K)_1$ 、 K 、 $N(K)_2$ 、 $D(K)_1$ 、 K_1 和 K_2 组成。如果 $|e_1|$ 和 $|e_2|$ 都很小，则将所有 9 个单元组成宏单元 M 。类似地，可以分别定义其他类型的合并单元模块及其宏单元，更多细节参见文献 [26]。最后将这 5 种合并单元模块按照合适的顺序进行组合得到完整的单元合并算法。

利用小单元合并算法 1，总能找到满足假设 2.1 的宏单元。算法的成功性参见文献 [26, 定理 3.1]

算法 1 边界单元可行链的小单元合并算法

输入：可行链 \mathfrak{C} 。

输出：诱导网格 Induced(\mathfrak{C})。

(1) 找到所有长度 $n \geq 2$ 的子链 \mathfrak{S} 使得 $\mathfrak{S}\{i\} \in \mathcal{T}_1$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，即子链中的所有边界单元均为第一类型边界单元。

如果 $n = 2k + 1$ 为奇数，则

for $i = 1, 2, \dots, k - 1$ do

使用类型 3 模块，将 $(\mathfrak{S}\{2i\}, \mathfrak{S}\{2i + 1\})$ 合并。

end

使用类型 2 模块，将 $(\mathfrak{S}\{2k - 1\}, \mathfrak{S}\{2k\}, \mathfrak{S}\{2k + 1\})$ 合并。

否则如果 $n = 2k$ 为偶数，则

for $i = 1, 2, \dots, k$ do

使用类型 3 模块，将 $(\mathfrak{S}\{2i - 1\}, \mathfrak{S}\{2i\})$ 合并。

end

(2) 在剩余的边界单元里，找到所有长度为 3 的子链，使得 $\mathfrak{S}\{1\} \in \mathcal{T}_1$, $\mathfrak{S}\{2\} \in \mathcal{T}_2$ 和 $\mathfrak{S}\{3\} \in \mathcal{T}_1$ ；使用类型 4 模块，将 $(\mathfrak{S}\{1\}, \mathfrak{S}\{2\}$ 和 $\mathfrak{S}\{3\})$ 合并。

(3) 在剩余的边界单元里，找到所有长度为 3 的子链，使得 $\mathfrak{S}\{1\} \in \mathcal{T}_2$, $\mathfrak{S}\{2\} \in \mathcal{T}_1$ 和 $\mathfrak{S}\{3\} \in \mathcal{T}_2$ ；使用类型 1 模块，将 $(\mathfrak{S}\{1\}, \mathfrak{S}\{2\}$ 和 $\mathfrak{S}\{3\})$ 合并。

(4) 在剩余的边界单元里，找到所有边界单元 $K \in \mathcal{T}_2$ ；使用类型 5 模块，将 K 合并。

中的证明. 如果 $K \in \mathcal{T}^\Gamma$ 是大单元, 记 $M(K) = K$. 由网格 \mathcal{T} 产生的诱导网格定义为

$$\mathcal{M} = \{M(K) : K \in \mathcal{T}\} \cup \{K \in \mathcal{T} : K \subset \Omega, K \not\subset M(K') \text{ 对于某个 } K' \in \mathcal{T} \text{ 成立}\}.$$

至此, 定义的诱导网格 \mathcal{M} 中任意一个边界单元都是大单元, 并且边界 Γ 至多与单元 $K \in \mathcal{M}$ 的两条不同的边相交. 记 $\mathcal{M} = \text{Induced}(\mathcal{T})$. 此外还要求诱导网格满足如下的兼容性假设.

假设 2.2 对于任意的一条边 $e \in \mathcal{E}^{\text{int}} := \{e : e = \partial K \cap \partial K', K, K' \in \mathcal{M}\}$, 记 $e \subset f$ 和 $e \subset f'$, f 和 f' 分别为 K 和 K' 包含 e 的边, 则只允许出现以下两种情形:

- (1) $f \subset f'$ 或 $f' \subset f$;
- (2) $e \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

事实上, 由单元合并算法生成的诱导网格将自动满足以上的假设, 有如下的定理.

定理 2.1 一条边界单元组成长度为 $n \geq 2$ 的可行链 \mathfrak{C} , 满足 $\mathfrak{C}(1) = \mathfrak{C}(n)$, \mathcal{M} 是通过图 3 和 4 所示的 5 种类型的合并单元模块生成的诱导网格. 对于任意一条边 $e = \partial M \cap \partial M'$, $M, M' \in \mathcal{M}$, 令 f 和 f' 分别表示 M 和 M' 包含 e 的边, 则一定有 (1) $f \subset f'$ 或 $f' \subset f$; 或者 (2) $e \cap \Gamma \neq \emptyset$.

证明 该定理的证明参见文献 [27, 定理 6.1]. \square

对于每个边界单元 $K \in \mathcal{M}^\Gamma := \{K \in \mathcal{M} : K \cap \Gamma \neq \emptyset\}$, 令 $\Gamma_K = K \cap \Gamma$, Γ_K^h 表示连接 Γ 与单元边界 ∂K 的两个交点的开线段. Γ_K^h 将 K 分割成两个多边形, 记 K^h 为顶点均落在 $\bar{\Omega}$ 中的多边形, 则它可以看作是曲边单元 $\tilde{K} = K \cap \Omega$ 的多边形近似. 令 $A_K \in \Omega$ 为到线段 Γ_K^h 距离最近的 K 的顶点. 由于 K 是大单元, 由定义可知 K^h 可以被一些形状正则的三角形 K_j^h ($1 \leq j \leq j_K, 1 \leq j_K \leq 3$) 所分割 (参见文献 [27, 引理 2.1]), 这里形状正则的三角形即为有限元经典意义上的形状正则三角划分 (参见文献 [30]). 图 5 给出三角形划分的示例, 易见 $\overline{K^h} = \bigcup_{j=1}^{j_K} \overline{K_j^h}$, 始终记 K_1^h 为含有 Γ_K^h 的三角形, 则 $\tilde{K}_1 = (\tilde{K} \cap K_1^h) \cup (\tilde{K} \setminus \overline{K^h})$, 即为将 K_1^h 的边 Γ_K^h 替换为 Γ_K 的曲边三角形, $\tilde{K}_j = \tilde{K} \cap K_j^h$ ($2 \leq j \leq j_K$), 因此 $\tilde{K} = \bigcup_{j=1}^{j_K} \tilde{K}_j$. 记 $\mathcal{M}^h := \mathcal{M}^\Delta \cup (\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^\Gamma)$, $\mathcal{M}^\Delta := \{\tilde{K}_j : 1 \leq j \leq j_K, K \in \mathcal{M}^\Gamma\}$, 则 \mathcal{M}^h 表示包含矩形、三角形和曲边三角形的混合网格. 由定理 2.1 可知混合网格满足兼容性. 这个兼容性条件使得我们可以在含有悬点的混合网格上定义协调的有限元空间 (参见文献 [11, 第 4.1 小节]).

由于需要对网格 \mathcal{T}_0 做一些局部的四分加密, 因此 \mathcal{T} 中含有悬点. 回顾 Babuška 和 Miller [4] 对于含有悬点的 Cartesian 网格 \mathcal{T} 提出的 K 网格概念. 令 \mathcal{N}^0 表示网格 \mathcal{T} 的所有协调节点的集合, 即落在边界 $\partial\Omega$ 上的单元的顶点或者 4 个单元的公共顶点. 对于每个协调的节点 P , 令 $\psi_P \in H^1(\Omega)$ 表示分片双线性函数, 使得对于任意 $Q \in \mathcal{N}^0$, 都有 $\psi_P(Q) = \delta_{PQ}$, 其中 δ_{PQ} 为 Kronecker delta 函数. 假设 \mathcal{T} 有如下的 K 网格条件.

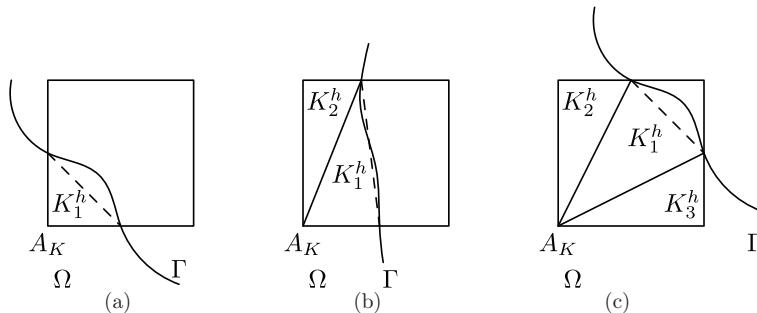


图 5 边界单元上 K_j^h 的示例, Γ_K^h 由虚线表示. (a) Ω 包含 K 的一个顶点; (b) Ω 包含 K 的两个顶点; (c) Ω 包含 K 的三个顶点

假设 2.3 存在一个相对于网格 \mathcal{T} 加密水平一致的常数 C 使得对于任意的协调节点 $P \in \mathcal{N}^0$, $\text{diam}(\text{supp}(\psi_P)) \leq C \min_{K \in \mathcal{T}_P} h_K$, 其中 $\mathcal{T}_P = \{K \in \mathcal{T} : K \subset \text{supp}(\psi_P)\}$.

更多关于 K 网格的性质可参见文献 [4]. Bonito 和 Nocetto 在文献 [12, 第 6 节] 中提出了一种加密算法能够保证假设 2.3 总是可以满足.

令 $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\text{int}} \cup \mathcal{E}^{\text{bdy}}$, $\mathcal{E}^{\text{bdy}} := \mathcal{E}^D \cup \mathcal{E}^N$, $\mathcal{E}^D := \{\Gamma_K^D = \Gamma_D \cap K : K \in \mathcal{M}\}$, $\mathcal{E}^N := \{\Gamma_K^N = \Gamma_N \cap K : K \in \mathcal{M}\}$. 对于任意的子区域 $\hat{\Omega} \subset \Omega$ 和 $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$, 记

$$(u, v)_{\hat{\Omega}} = \int_{\hat{\Omega}} uv dx, \quad \langle u, v \rangle_{\hat{\Gamma}} = \int_{\hat{\Gamma}} uv ds.$$

对于任意的边 $e \in \mathcal{E}$, 固定边 e 的单位法向量方向 \mathbf{n}_e . 特别地, 当 $e \in \mathcal{E}^{\text{bdy}}$ 时, \mathbf{n}_e 为 $\partial\Omega$ 的单位外法线方向. 定义函数 $v \in H^1(\mathcal{M})$ 在边 e 的跳跃为

$$[v]_e := v^- - v^+, \quad \forall e \in \mathcal{E}^{\text{int}}; \quad [v] := v^-, \quad \forall e \in \mathcal{E}^{\text{bdy}},$$

其中 $v^\pm|_e(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} v(x \pm \epsilon \mathbf{n}_e)$ 表示 v 在边 e 上沿方向 $\pm \mathbf{n}_e$ 的迹. 对于向量函数, 跳跃按分量定义, 即 $[\mathbf{q}] := ([q_1], [q_2])^T$. 为了方便记号, 定义分片常数的法向量函数为 $\mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{E}) = \Pi_{e \in \mathcal{E}} L^\infty(e)$, $\mathbf{n}|_e = \mathbf{n}_e, \forall e \in \mathcal{E}$.

2.2 非拟合网格的协调有限元空间

本小节介绍标量和向量的非拟合网格的协调有限元空间. 对于给定的正整数 $p \geq 1$, 定义如下的有限元空间:

$$\begin{aligned} X_p(K) &:= \{\varphi \in L^2(\tilde{K}) : \varphi|_{\tilde{K}_j} \in P_p(\tilde{K}_j), 1 \leq j \leq j_K\}, \quad \forall K \in \mathcal{M}^\Gamma, \\ X_p(\mathcal{M}) &:= \{\varphi \in C^0(\bar{\Omega}) : \text{如果 } K \in \mathcal{M}^\Gamma, \text{ 则 } \varphi \in X_p(K), \text{ 否则 } \varphi \in Q_p(K)\}, \\ \mathbf{W}_p(\mathcal{M}) &:= \{\psi \in [L^2(\Omega)]^2 : \text{如果 } K \in \mathcal{M}^\Gamma, \text{ 则 } \psi \in [X_p(K)]^2, \text{ 否则 } \psi \in [Q_p(K)]^2\}. \end{aligned}$$

对于任意的 Lipschitz 区域 $D \subset \mathbb{R}^2$, 空间 $P_p(D)$ 表示定义在 D 上次数不超过 p 的多项式空间, $Q_p(D)$ 表示定义在 D 上次数不超过 p 的张量积多项式空间. 注意到标量空间 $X_p(\mathcal{M})$ 为协调有限元空间, 作为解的逼近空间, 向量空间 $\mathbf{W}_p(\mathcal{M})$ 为间断有限元空间, 将作为辅助空间用于定义提升算子.

值得指出的是, $X_p(\mathcal{M})$ 中的有限元函数可以等价地看成是定义在混合网格 \mathcal{M}^h 上的协调有限元函数. 采用现在的方式来定义有限元空间是为了强调我们的方法与非拟合网格有限元方法的联系以及如何来构造满足要求的混合网格.

进一步地, 回顾文献 [25] 中的界面偏差的概念, 它量化了网格是否刻画了 Γ 的几何形状.

定义 2.3 对于任意一个边界单元 $K \in \mathcal{M}^\Gamma$, 界面偏差 η_K 定义为

$$\eta_K = \frac{\text{dist}(\Gamma_K, \Gamma_K^h)}{\text{dist}(A_K, \Gamma_K^h)},$$

其中, $\text{dist}(\Gamma_K, \Gamma_K^h) = \max_{\mathbf{x} \in \Gamma_K} (\min_{\mathbf{y} \in \Gamma_K^h} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ 表示 Γ_K 偏离 Γ_K^h 的距离, $\text{dist}(A_K, \Gamma_K^h) = \min_{\mathbf{y} \in \Gamma_K^h} |A_K - \mathbf{y}|$ 表示点 A_K 到 Γ_K^h 的距离.

对于光滑的 C^2 边界, 易证存在不依赖于网格尺度 h_K 的常数 C 使得 $\eta_K \leq Ch_K$. 因此对于光滑的边界, 假设 $\eta_K \leq \frac{1}{2}$.

下面给出求解模型方程 (2.1) 和 (2.2) 的非拟合网格的协调有限元方法. 首先利用局部间断有限元的思想 [1, 46], 给出格式的混合形式. 令 $\mathbf{q} = \nabla u$, $\mathbf{s} = a\mathbf{q}$, 将方程 (2.1) 和 (2.2) 改写成如下形式:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \nabla u, \quad \mathbf{s} = a\mathbf{q}, \quad -\nabla \cdot \mathbf{s} = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \mathbf{u} &= g_D, \quad \text{在 } \Gamma_D \text{ 上,} \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = g_N, \quad \text{在 } \Gamma_N \text{ 上.}\end{aligned}$$

求解 $(u_h, \mathbf{q}_h, \mathbf{s}_h) \in X_p(\mathcal{M}) \times \mathbf{W}_p(\mathcal{M}) \times \mathbf{W}_p(\mathcal{M})$ 使得对于任意 $(v_h, \mathbf{r}_h, \mathbf{p}_h) \in X_p(\mathcal{M}) \times \mathbf{W}_p(\mathcal{M}) \times \mathbf{W}_p(\mathcal{M})$, 都有

$$\begin{aligned}(\mathbf{q}_h, \mathbf{r}_h)_\Omega &= -(u_h, \nabla \cdot \mathbf{r}_h)_\Omega + \langle u_h^-, [\![\mathbf{r}_h]\!] \cdot \mathbf{n} \rangle_{\mathcal{E}^{\text{int}}} + \langle u_h^-, [\![\mathbf{r}_h]\!] \cdot \mathbf{n} \rangle_{\mathcal{E}^N} + \langle u_h^+, [\![\mathbf{r}_h]\!] \cdot \mathbf{n} \rangle_{\mathcal{E}^D}, \\ (\mathbf{s}_h, \mathbf{p}_h)_\Omega &= (a\mathbf{q}_h, \mathbf{p}_h)_\Omega, \\ (\mathbf{s}_h, \nabla v_h)_\Omega - \langle \mathbf{s}_h^+ \cdot \mathbf{n}, [\![v_h]\!] \rangle_{\mathcal{E}^{\text{int}}} - \langle \mathbf{s}_h^+ \cdot \mathbf{n}, [\![v_h]\!] \rangle_{\mathcal{E}^N} - \langle \mathbf{s}_h^- \cdot \mathbf{n}, [\![v_h]\!] \rangle_{\mathcal{E}^D} &= (f, v_h)_\Omega.\end{aligned}$$

定义

$$u_h^+|_e = g_D, \quad \forall e \in \mathcal{E}^D; \quad \mathbf{s}_h^+ \cdot \mathbf{n}|_e = ag_N, \quad \forall e \in \mathcal{E}^N. \quad (2.4)$$

由于 $[\![v_h]\!]|_e = 0$ ($\forall e \in \mathcal{E}^{\text{int}}$), 所以分部积分可得到

$$(\mathbf{q}_h, \mathbf{r}_h)_\Omega = (\nabla u_h, \mathbf{r}_h)_\Omega - \langle u_h^-, [\![\mathbf{r}_h]\!] \cdot \mathbf{n} \rangle_{\mathcal{E}^D} + \langle g_D, [\![\mathbf{r}_h]\!] \cdot \mathbf{n} \rangle_{\mathcal{E}^D}, \quad (2.5)$$

$$(\mathbf{s}_h, \mathbf{p}_h)_\Omega = (a\mathbf{q}_h, \mathbf{p}_h)_\Omega, \quad (2.6)$$

$$(\mathbf{s}_h, \nabla v_h)_\Omega - \langle \mathbf{s}_h^- \cdot \mathbf{n}, [\![v_h]\!] \rangle_{\mathcal{E}^D} = (f, v_h)_\Omega + \langle ag_N, [\![v_h]\!] \rangle_{\mathcal{E}^N}. \quad (2.7)$$

对于任意的 $v \in L^2(\Gamma_D)$, 定义提升算子 $L : L^2(\Gamma_D) \rightarrow \mathbf{W}_p(\mathcal{M})$, 使得

$$(L(v), \mathbf{r})_\Omega = \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}, v \rangle_{\mathcal{E}^D}, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbf{W}_p(\mathcal{M}). \quad (2.8)$$

则 (2.5) 和 (2.6) 化简为

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_h &= \nabla u_h - L(u_h) + L(g_D), \\ (\mathbf{s}_h, \mathbf{p}_h)_\Omega &= (a\mathbf{q}_h, \mathbf{p}_h)_\Omega, \\ (\mathbf{s}_h, \nabla v_h - L(v_h))_\Omega &= (f, v_h)_\Omega + \langle ag_N, [\![v_h]\!] \rangle_{\mathcal{E}^N}.\end{aligned}$$

将 \mathbf{q}_h 代入第二个等式并令 $\mathbf{p}_h = \nabla v_h - L(v_h)$ 来消去 \mathbf{q}_h 和 \mathbf{s}_h , 得到

$$(a(\nabla u_h - L(u_h)), \nabla v_h - L(v_h))_\Omega = (f, v_h)_\Omega - (aL(g_D), \nabla v_h - L(v_h))_\Omega + \langle ag_N, [\![v_h]\!] \rangle_{\mathcal{E}^N}.$$

在实际计算中, 还需要利用 Nitsche 技术增加边界上的稳定化项. 从而非拟合网格的协调有限元方法定义为: 求解 $u_h \in X_p(\mathcal{M})$ 使得

$$a_h(u_h, v_h) = F_h(v_h), \quad \forall v_h \in X_p(\mathcal{M}), \quad (2.9)$$

其中

$$a_h(u_h, v_h) = (a(\nabla u_h - L(u_h)), \nabla v_h - L(v_h))_\Omega + \langle \alpha u_h, v_h \rangle_{\mathcal{E}^D},$$

$$F_h(v_h) = (f, v_h)_\Omega - (aL(g_D), \nabla v_h - L(v_h))_\Omega + \langle ag_N, v_h \rangle_{\mathcal{E}^N} + \langle \alpha g_D, v_h \rangle_{\mathcal{E}^D},$$

这里边界上的罚系数定义如下：

$$\alpha|_{\Gamma_K} = \alpha_0 a_K \Theta_K h_K^{-1} p^2, \quad a_K = \max_{\mathbf{x} \in \bar{K}} a(\mathbf{x}), \quad \Theta_K = T \left(\frac{1+3\eta_K}{1-\eta_K} \right)^{p+\frac{3}{2}}, \quad \forall K \in \mathcal{M}^\Gamma, \quad (2.10)$$

其中 α_0 为某个固定的常数，本文取为 1，函数 $T(t) = t + \sqrt{t^2 - 1}$ 。注意到 η_K 为定义 2.3 中的界面偏差，这个罚项在适定性以及误差估计中起到了关键性作用。

3 适定性和先验误差估计

本节给出格式 (2.9) 的适定性和 hp 误差估计。回顾经典的 hp 反估计（参见文献 [49, 定理 4.76]），对于任意的 $K \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^\Gamma$ ，都有

$$\|\nabla v\|_{L^2(K)} \leq C p^2 h_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}, \quad \forall v \in Q_p(K), \quad (3.1)$$

$$\|v\|_{L^2(\partial K)} \leq C p h_K^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(K)}, \quad \forall v \in Q_p(K). \quad (3.2)$$

Chen 等在文献 [25, 引理 2.4] 中给出了含曲边单元上 Q_p 元的反估计。对于三角形上的 P_p 元，有如下的结果。

引理 3.1 令 Δ 表示三角形，其顶点分别为 $A = (a_1, a_2)^\top$ 、 $B = (0, 0)^\top$ 和 $C = (c_1, 0)^\top$ ，其中 $a_2, c_1 > 0$ 。令 $\delta \in (0, a_2)$ ， $\Delta_\delta = \{\mathbf{x} \in \Delta : \text{dist}(\mathbf{x}, BC) > \delta\}$ ，其中 $\text{dist}(\mathbf{x}, BC) = \min\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{y} \in BC\}$ ，则有

$$\|v\|_{L^2(\Delta)} \leq T \left(\frac{1+\delta a_2^{-1}}{1-\delta a_2^{-1}} \right)^{p+\frac{3}{2}} \|v\|_{L^2(\Delta_\delta)}, \quad \forall v \in P_p(\Delta), \quad (3.3)$$

其中 $T(t) = t + \sqrt{t^2 - 1}$ 。

证明 该引理的证明与文献 [25, 引理 2.4] 类似，这里省略证明的细节。 \square

类似地有如下曲边区域上的反估计，参见文献 [27, 引理 2.5] 中的证明。

引理 3.2 令 $K \in \mathcal{M}^\Gamma$ ， $\tilde{K} = K \cap \Omega$ ，则存在一个不依赖于 h_K ($\forall K \in \mathcal{M}$)、 p 和 η_K ($\forall K \in \mathcal{M}^\Gamma$) 的常数 C 使得

$$\|\nabla v\|_{L^2(\tilde{K})} \leq C p^2 h_K^{-1} \Theta_K^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\tilde{K})}, \quad \forall v \in X_p(K), \quad (3.4)$$

$$\|v\|_{L^2(\partial \tilde{K})} \leq C p h_K^{-\frac{1}{2}} \Theta_K^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\tilde{K})}, \quad \forall v \in X_p(K). \quad (3.5)$$

对于提升算子，有下面的稳定性估计。

引理 3.3 存在不依赖于 p 、 h_K ($\forall K \in \mathcal{M}$)、 η_K ($\forall K \in \mathcal{M}^\Gamma$) 和系数 a 的常数 c_L 使得

$$\|a^{1/2} L(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_L \|\alpha^{1/2} v\|_{L^2(\mathcal{E}^D)}, \quad \forall v \in L^2(\mathcal{E}^D), \quad (3.6)$$

这里的 α 定义为 (2.10)。

证明 在 (2.8) 中, 令 $\mathbf{r} = P_h(aL(v))$, P_h 为 $[L^2(\Omega)]^2 \rightarrow \mathbf{W}_p(\mathcal{M})$ 的 L^2 投影算子, 即

$$(P_h \mathbf{v}, \mathbf{s})_\Omega = (\mathbf{v}, \mathbf{s})_\Omega, \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbf{W}_p(\mathcal{M}),$$

则

$$\begin{aligned} \|a^{1/2}L(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leqslant \|\alpha^{-1/2}P_h(aL(v))\|_{L^2(\mathcal{E}^D)}\|\alpha^{1/2}v\|_{L^2(\mathcal{E}^D)} \\ &\leqslant C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}^D} \|\Theta_K^{-1/2}h_K^{1/2}p^{-1}a_K^{-1/2}P_h(aL(v))\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2} \|\alpha^{1/2}v\|_{L^2(\mathcal{E}^D)} \\ &\leqslant C \left(\sum_{K \in \mathcal{M}^\Gamma} \|a_K^{-1/2}P_h(aL(v))\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\alpha^{1/2}v\|_{L^2(\mathcal{E}^D)} \\ &\leqslant C \|a^{1/2}L(v)\|_{L^2(\Omega)} \|\alpha^{1/2}v\|_{L^2(\mathcal{E}^D)}. \end{aligned}$$

上面第三个不等号使用了引理 3.2 中的区域反估计. \square

对于任意的 $v \in H^1(\mathcal{M})$, 定义有限元范数为

$$\|v\|^2 = \|a^{1/2}\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\alpha^{1/2}v\|_{L^2(\mathcal{E}^D)}^2.$$

如下定理为稳定性结果.

定理 3.1 对于任意的 $v \in X_p(\mathcal{M})$, 如下不等式成立:

$$a_h(v, v) \geqslant (4 + c_L^2)^{-1} \|v\|^2, \quad (3.7)$$

其中 c_L 为引理 3.3 中的常数.

证明 这个定理的证明是标准的, 由引理 3.3 和文献 [25, 定理 2.1] 的证明可知定理成立. \square

由 Cauchy-Schwarz 不等式及引理 3.3 可知 $a_h(u, v)$ 满足连续性, 即

$$a_h(u, v) \leqslant (c_L + 1) \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in X_p(\mathcal{M}). \quad (3.8)$$

因此根据 Lax-Milgram 定理可知, 离散问题 (2.9) 存在唯一解. 下面给出格式的先验误差估计, 首先回顾文献 [27, 定理 2.1] 的 hp 插值算子.

引理 3.4 给定正整数 $s > 0$, 假设 $u \in H^s(\Omega)$, 则存在插值算子 $\Pi_h : H^s(\Omega) \rightarrow X_p(\mathcal{M})$, 使得如下不等式成立:

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{h}{p} \|\nabla(u - \Pi_h u)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \Theta^{\frac{1}{2}} (1 + \log p)^2 \frac{h^{\min(p+1,s)}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\Omega)}, \quad (3.9)$$

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\mathcal{E}^{\text{bdy}})} \leqslant C \Theta^{\frac{1}{2}} (1 + \log p)^2 \frac{h^{\min(p+1,s)-\frac{1}{2}}}{p^{s-1}} \|u\|_{H^s(\Omega)}, \quad (3.10)$$

其中, $\Theta = \max_{K \in \mathcal{M}^\Gamma} \Theta_K$, $h = \max_{K \in \mathcal{M}} h_K$, C 是不依赖于 p 、 h_K ($\forall K \in \mathcal{M}$) 和 η_K ($\forall K \in \mathcal{M}^\Gamma$) 的常数.

利用这个 hp 插值算子, 可以证明如下先验误差估计.

定理 3.2 令 $u \in H^{s+1}(\Omega)$ ($s \geqslant 1$) 是问题 (2.1) 和 (2.2) 的解, $u_h \in X_p(\mathcal{M})$ 为 (2.9) 的解, 则存在不依赖于 p 、 h_K ($\forall K \in \mathcal{M}$)、 η_K ($\forall K \in \mathcal{M}^\Gamma$) 和系数 a 的常数 C 使得

$$\|u - u_h\| \leqslant C \Theta (1 + \log p)^2 \frac{h^{\min(p,s)}}{p^{s-1}} \|a^{\frac{1}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^{s+1}(\Omega)}. \quad (3.11)$$

证明 由于 u 满足方程 (2.1) 和 (2.2), u_h 满足 (2.9), 则有误差方程

$$a_h(u, v_h) - a_h(u_h, v_h) = R(u, v_h), \quad (3.12)$$

其中

$$R(u, v_h) = \langle a \nabla u \cdot \mathbf{n}, v_h \rangle_{\mathcal{E}^D} - (a \nabla u, L(v_h))_{\Omega}, \quad \forall v_h \in X_p(\mathcal{M}). \quad (3.13)$$

由提升算子的定义 (2.8) 及插值算子误差估计 (3.9) 和 (3.10), 可得

$$\begin{aligned} |R(u, v_h)| &\leq |\langle a(\nabla u - \Pi_h \nabla u) \cdot \mathbf{n}, v_h \rangle_{\mathcal{E}^D}| + |(a(\nabla u - \Pi_h \nabla u), L(v_h))_{\Omega}| \\ &\leq C\Theta^{\frac{1}{2}}(1 + \log p)^2 \frac{h^{\min(p+1,s)}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|a^{\frac{1}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{H^s(\Omega)} \|\alpha^{\frac{1}{2}} v_h\|_{L^2(\mathcal{E}^D)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中 Π_h 表示按分量作用 Π_h 的向量插值算子. 进一步地, 改写误差方程 (3.12), 并利用 (3.8) 和 (3.14) 得到

$$\begin{aligned} a_h(\Pi_h u - u_h, v_h) &= a_h(\Pi_h u - u, v_h) + R(u, v_h) \\ &\leq (\|a^{\frac{1}{2}} \nabla(\Pi_h u - u)\|_{L^2(\Omega)} + \|\alpha^{\frac{1}{2}}(\Pi_h u - u)\|_{L^2(\mathcal{E}^D)}) \|v_h\| \\ &\quad + C\Theta^{\frac{1}{2}}(1 + \log p)^2 \frac{h^{\min(p+1,s)}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|a^{\frac{1}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{H^s(\Omega)} \|\alpha^{\frac{1}{2}} v_h\|_{L^2(\mathcal{E}^D)} \\ &\leq C\Theta(1 + \log p)^2 \frac{h^{\min(p,s)}}{p^{s-1}} \|a^{\frac{1}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^{s+1}(\Omega)} \|v_h\|. \end{aligned}$$

最后一个不等号使用了 (3.9) 和 (3.10). 最后令 $v_h = \Pi_h u - u_h$, 结合定理 3.1 以及三角不等式完成定理的证明. \square

4 有限元基函数的构造

本小节介绍有限元基函数的构造. 考虑混合的形状正则网格 \mathcal{M}^h 中的矩形和三角形两种单元, 对于含曲边的三角形单元, 函数在曲边三角形上的定义可以看作是直边所组成的三角形上的自然延拓.

对于矩形单元 $K \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^\Gamma$, 局部基函数为 Gauss-Lobatto-Legendre 积分点上的 Lagrange 多项式. 记 $K = (x_K^1, x_K^2) \times (y_K^1, y_K^2)$, $h_K^x = x_K^2 - x_K^1$, $h_K^y = y_K^2 - y_K^1$, $-1 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_p = 1$ 为 Gauss-Lobatto-Legendre 积分点, 其中节点 ξ_k ($k = 1, 2, \dots, p-1$) 是阶数为 p 的 Legendre 多项式 L_p 的导数在区间 $(-1, 1)$ 上的零点, 即

$$L'_p(\xi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p-1.$$

在单元 K 上, 基于 Gauss-Lobatto-Legendre 积分点, 可以构造 Lagrange 多项式基函数, 记

$$\begin{aligned} \phi_1^\ell &\in P^p([x_K^1, x_K^2]), \quad \phi_1^\ell\left(x_K^1 + \frac{(\xi_{\ell'} + 1)h_K^x}{2}\right) = \delta_{\ell\ell'}, \quad 0 \leq \ell, \ell' \leq p, \\ \phi_2^m &\in P^p([y_K^1, y_K^2]), \quad \phi_2^m\left(y_K^1 + \frac{(\xi_{m'} + 1)h_K^y}{2}\right) = \delta_{mm'}, \quad 0 \leq m, m' \leq p. \end{aligned}$$

则由张量积定义基函数

$$\phi_K^{\ell m}(x, y) = \phi_1^\ell(x)\phi_2^m(y), \quad \phi_K^{\ell m} \in Q^p(K), \quad \phi_K^{\ell m}(\xi_K^{\ell' m'}) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}, \quad 0 \leq \ell, \ell', m, m' \leq p,$$

其中 $\xi_K^{\ell' m'} = (x_K^1 + (\xi_{\ell'} + 1)h_K^x/2, y_K^1 + (\xi_{m'} + 1)h_K^y/2)^T$. 因此对于任意的 $w_h \in X_p(\mathcal{M})$, 都有

$$w_h|_K = \sum_{\ell=0}^p \sum_{m=0}^p w_K^{\ell m} \phi_K^{\ell m}, \quad \forall K \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^\Gamma. \quad (4.1)$$

对于三角形单元 $K \in \mathcal{M}^\Delta$, 记 K 的三个顶点分别为 $v_K^i = (x_K^i, y_K^i)^T$ ($i = 1, 2, 3$), 选取三角形上的 Lobatto 点 [10] 作为自由度节点, 更多插值点的选取可参见文献 [37],

$$\begin{aligned} \zeta_K^{\ell m} &= \frac{1}{3}(1+2\lambda_\ell - \lambda_m - \lambda_k)v_K^1 + \frac{1}{3}(1+2\lambda_m - \lambda_k - \lambda_\ell)v_K^2 + \frac{1}{3}(1+2\lambda_k - \lambda_\ell - \lambda_m)v_K^3, \\ \ell &= 0, \dots, p, \quad m = 0, \dots, p-\ell, \quad k = p-\ell-m, \\ \lambda_m &= \frac{\xi_m + 1}{2}, \quad m = 0, \dots, p. \end{aligned}$$

这些自由度节点满足在三角形边上为一维的 Gauss-Lobatto 点, 因此与矩形单元的 Gauss-Lobatto 点兼容. 为了定义三角形单元上节点 $\zeta_K^{\ell m}$ 的 Lagrange 插值多项式, 本文介绍三角形上正交基函数 Proriol 多项式 [47]. 定义参考单元 $T = \{(\zeta, \eta) : 0 \leq \zeta, \eta \leq 1, \zeta + \eta \leq 1\}$, 则每个三角形单元 K 通过如下仿射变换 $F_K : (x, y)^T \rightarrow (\zeta, \eta)^T$ 映至参考单元:

$$F_K(x, y) := A_K^{-1}((x, y)^T - v_K^1), \quad A_K = (v_K^2 - v_K^1, v_K^3 - v_K^1).$$

定义 Duffy 变换, 将参考三角形单元映为标准方形单元 $-1 \leq \zeta', \eta' \leq 1$. 记 Duffy 变换为 G :

$$G : (\zeta, \eta)^T \rightarrow (\zeta', \eta')^T, \quad \zeta' = \frac{2\zeta}{1-\eta} - 1, \quad \eta' = 2\eta - 1.$$

则 Proriol 多项式定义为

$$\mathcal{P}_{n_{\ell m}}(\zeta', \eta') = L_\ell(\zeta') \left(\frac{1-\eta'}{2} \right)^\ell J_m^{(2\ell+1, 0)}(\eta'), \quad (4.2)$$

其中, L_ℓ 为 Legendre 多项式, $J_m^{(2\ell+1, 0)}$ 为 Jacobi 多项式, $n_{\ell m} = 1 + \frac{(\ell+m)(\ell+m+1)}{2} + m$, $0 \leq \ell, m, \ell+m \leq p$. 对于给定的 $N_p = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ 个 Lobatto 点 $\{\zeta_K^{\ell m}\}$, 将其重新编号为 $\{\zeta_K^{n_{\ell m}} \mid 1 \leq n_{\ell m} \leq N_p\}$, 构造广义 Vandermonde 矩阵

$$\mathbf{V}_{ij} = \mathcal{P}_j \circ G \circ F_K(\zeta_K^i), \quad 1 \leq i, j \leq N_p. \quad (4.3)$$

假设 \mathbf{V} 可逆, 则节点 $\zeta_K^{\ell m}$ 的 Lagrange 插值多项式为

$$\varphi_K^{\ell m}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{V}^{-1})_{i, n_{\ell m}} \mathcal{P}_i \circ G \circ F_K(x, y), \quad (4.4)$$

满足

$$\varphi_K^{\ell m}(\zeta_K^{\ell' m'}) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}, \quad 0 \leq \ell, m, \ell+m \leq p, \quad 0 \leq \ell', m', \ell'+m' \leq p. \quad (4.5)$$

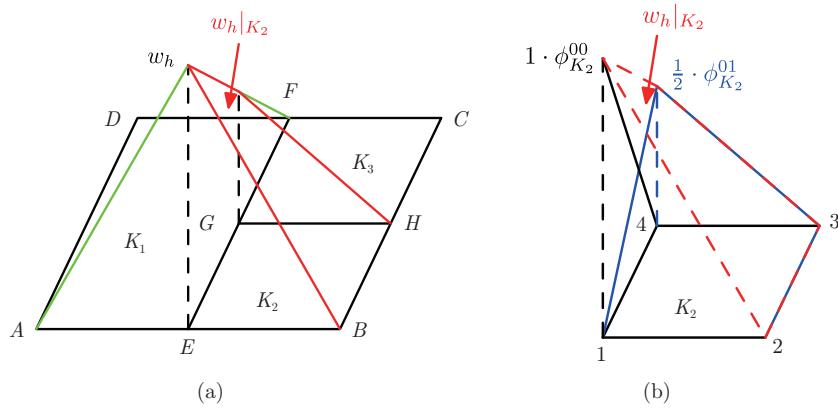


图 6 (网络版彩图) 有限元函数 $w_h \in X_p(\mathcal{M})$, $w_h(E) = 1$, $p = 1$. (a) 有限元函数在 K_1 、 K_2 和 K_3 上的限制; (b) 有限元函数在 K_2 上的限制

因此对于任意的 $w_h \in X_p(\mathcal{M})$, 都有

$$w_h|_K = \sum_{\ell=0}^p \sum_{m=0}^{p-\ell} w_K^{\ell m} \varphi_K^{\ell m}, \quad \forall K \in \mathcal{M}^\Delta. \quad (4.6)$$

根据定理 2.1, 对系数 $w_K^{\ell m}$ 进行限制以保证协调性, 考虑如下两种情形:

- (1) 如果对于某条边 $e = \partial K \cap \partial K'$, 且 $e = f = f'$, 则 K 和 K' 在边 e 上的自由度节点位置相同, 因此当 $\xi_K^{\ell m}(\zeta_K^{\ell m}) = \xi_{K'}^{\ell' m'}(\zeta_{K'}^{\ell' m'})$ 时, $w_K^{\ell m} = w_{K'}^{\ell' m'}$, 即它们属于同一个自由度.
- (2) 如果对于某条边 $e = \partial K \cap \partial K'$, $e = f$, $e \subsetneq f'$, 则对于落在 e 上的节点 $\xi_K^{\ell m}$ 或 $\zeta_K^{\ell m}$, 令

$$w_K^{\ell m} = \begin{cases} w_h|_{K'}(\xi_K^{\ell m}), & \text{如果 } K \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^\Gamma, \\ w_h|_{K'}(\zeta_K^{\ell m}), & \text{如果 } K \in \mathcal{M}^\Delta, \end{cases}$$

从而构造了满足协调性要求的有限元基函数. 图 6 给出一个协调有限元函数的例子, 当 $p = 1$ 时, $w_h|_{K_1}(E) = 1$, $w_h(A) = w_h(D) = w_h(F) = w_h(B) = w_h(H) = 0$. 若 G 为一个悬点, 则 $w_h|_{K_2}$ 在边 EG 上的值由 $w_h|_{K_1}$ 给出, 因此 $w_h|_{K_2} = 1 \cdot \phi_{K_2}^{00} + \frac{1}{2} \cdot \phi_{K_2}^{01}$.

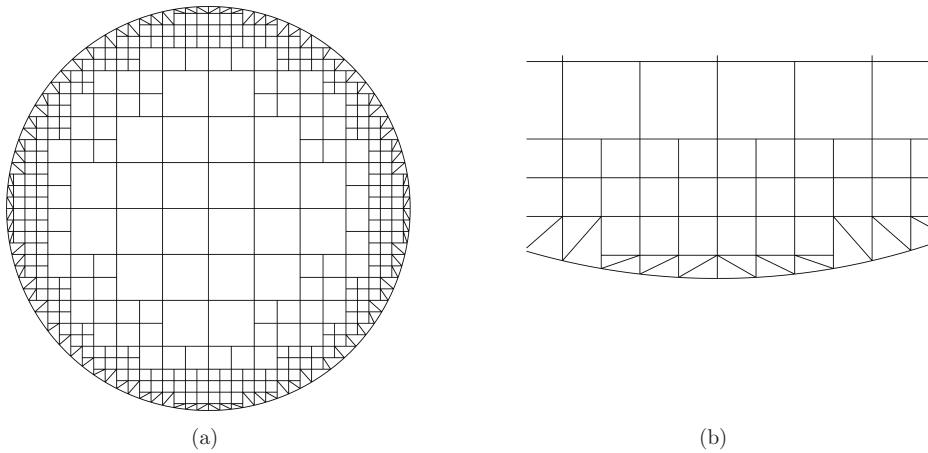
5 数值算例

本小节给出 3 个数值算例验证本文的理论结果.

例 5.1 令 Γ 为圆心在原点 $(0, 0)^\top$ 、半径为 $r_0 = 1.1$ 的圆. 计算区域为 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < r_0\}$, 令 $a = 10$, $\Gamma_D = \Gamma$. 选取右端项 f 和边界条件 g_D 使得方程 (2.1) 和 (2.2) 具有如下精确解:

$$u(x, y) = e^{x^2 + y^2 - r_0^2} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

使用 (2.9) 计算该问题, 多项式次数 p 分别取 1、2、3、4 和 5. 为了能够刻画区域边界的几何, 在边界局部加密网格使得边界单元的界面偏差 $\eta_K \leq \eta_0$ ($\forall K \in \mathcal{M}^\Gamma$), $\eta_0 = 0.05$. 图 7 展示了网格 \mathcal{T}_0 尺度为 $h = 1/4$ 的示例, 可以看到经过小单元合并算法, 在网格边界处的曲边三角形单元和三角形单元都是形状正则的. 表 1 给出误差 $\|u - u_h\|/\|u\|$ 的收敛阶, 可以看到最优的 p 阶收敛.

图 7 例 5.1 的计算区域示例, 网格 \mathcal{T}_0 尺度为 $h = 1/4$. (a) 计算网格; (b) 局部放大的网格表 1 例 5.1: 数值误差 $\|u - u_h\|/\|u\|$ 和收敛阶

h	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$	
	误差	阶								
1/4	2.51E-01	—	4.02E-02	—	3.45E-03	—	3.08E-04	—	1.65E-05	—
1/8	1.23E-01	1.03	9.55E-03	2.08	4.37E-04	2.98	1.91E-05	4.02	5.11E-07	5.02
1/16	5.85E-02	1.07	2.31E-03	2.05	5.44E-05	3.01	1.17E-06	4.02	1.59E-08	5.01
1/32	2.88E-02	1.02	5.68E-04	2.02	6.78E-06	3.00	7.30E-08	4.01	4.94E-10	5.00

例 5.2 考虑一个更复杂的区域. 令计算区域 Ω 定义如下:

$$\Omega = \left\{ (x, y) : r < \frac{2}{9}(3 + 4^{\sin(5\theta)}) \right\},$$

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : r = \frac{2}{9}(3 + 4^{\sin(5\theta)}) \right\},$$

其中, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, θ 是 (x, y) 在极坐标下的辐角. 令 $a = 1$, $\Gamma_D = \Gamma$. 选取右端项 f 和边界条件 g_D 使得方程 (2.1) 和 (2.2) 具有如下精确解:

$$u(x, y) = \sin(2\pi(x + y)).$$

测试 $p = 1, 2, 3, 4, 5$ 时数值解的误差和收敛阶, 网格的界面偏差同样满足 $\eta_K \leq \eta_0$ ($\forall K \in \mathcal{M}^\Gamma$), $\eta_0 = 0.05$. 图 8 给出网格 \mathcal{T}_0 尺度为 $h = 1/4$ 的示例, 数值误差和收敛阶在表 2 中展示, 可以清楚地看到 p 阶最优先收敛精度.

例 5.3 考虑混合边界条件的情形, 令计算区域 $\Omega = \Omega_1 \setminus (\bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_3)$, 其中

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y) : r < \frac{7}{3} \right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y) : \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 + \left(y + \frac{2}{3} \right)^2 < \frac{1}{4} \right\},$$

$$\Omega_3 = \left\{ (x, y) : \frac{9}{8}(x + y - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - y)^2 < 1 \right\},$$

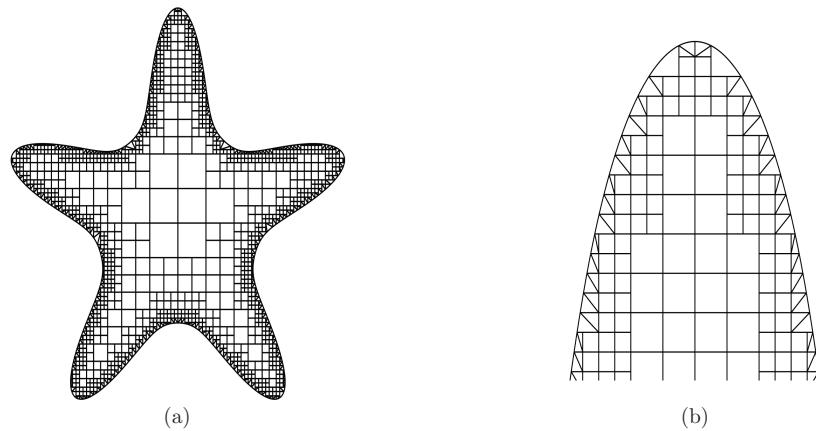


图 8 例 5.2 的计算区域示例, 网格 \mathcal{T}_0 尺度为 $h = 1/4$. (a) 计算网格; (b) 局部放大的网格

表 2 例 5.2: 数值误差 $\|u - u_h\|/\|u\|$ 和收敛阶

h	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$	
	误差	阶								
1/4	2.36E-01	—	3.83E-02	—	4.79E-03	—	4.63E-04	—	3.63E-05	—
1/8	1.15E-01	1.04	9.49E-03	2.01	5.95E-04	3.01	2.90E-05	4.00	1.14E-06	5.00
1/16	5.65E-02	1.02	2.34E-03	2.02	7.39E-05	3.01	1.80E-06	4.01	3.51E-08	5.00
1/32	2.83E-02	1.00	5.85E-04	2.00	9.24E-06	3.00	1.13E-07	4.00	1.11E-09	5.00

这里 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 令 $a = 1$, $\Gamma_D = \partial\Omega_1$, $\Gamma_N = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. 选取右端项 f 、边界条件 g_D 和 g_N 使得方程 (2.1) 和 (2.2) 具有如下精确解:

$$u(x, y) = \exp(\sin(2\pi(x + y))).$$

测试 $p = 1, 2, 3, 4, 5$ 时数值解的误差和收敛阶, 网格的界面偏差同样满足 $\eta_K \leq \eta_0$ ($\forall K \in \mathcal{M}$) 和 $\eta_0 = 0.05$. 图 9 给出网格 \mathcal{T}_0 尺度为 $h = 1/4$ 的示例, 数值误差和收敛阶在表 3 中展示, 可以清楚地看到 p 阶最优先收敛精度.

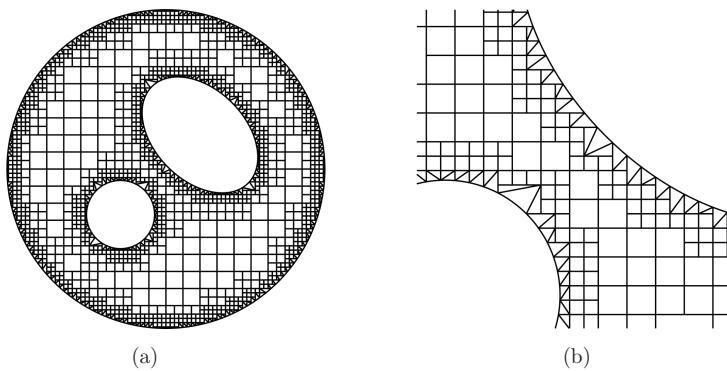


图 9 例 5.3 的计算区域示例, 网格 \mathcal{T}_0 尺度为 $h = 1/4$. (a) 计算网格; (b) 局部放大的网格

表 3 例 5.3: 数值误差 $\|u - u_h\|/\|u\|$ 和收敛阶

h	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$	
	误差	阶								
1/4	4.68E-01	—	1.61E-01	—	6.56E-02	—	2.54E-02	—	1.12E-02	—
1/8	2.36E-01	0.99	4.83E-02	1.73	1.06E-02	2.64	2.48E-03	3.36	5.40E-04	4.38
1/16	1.18E-01	1.00	1.23E-02	1.98	1.44E-03	2.88	1.70E-04	3.87	1.89E-05	4.84
1/32	5.90E-02	1.02	3.05E-03	2.01	1.81E-04	2.99	1.06E-05	4.00	5.69E-07	5.00

致谢 感谢审稿人对本文提出宝贵意见.

参考文献

- 1 Arnold D N, Brezzi F, Cockburn B, et al. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J Numer Anal*, 2002, 39: 1749–1779
- 2 Babuška I. The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Computing*, 1970, 5: 207–213
- 3 Babuška I, Banerjee U. Stable generalized finite element method (SGFEM). *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2012, 201–204: 91–111
- 4 Babuška I, Miller A. A feedback finite element method with a posteriori error estimation, Part I. The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1987, 61: 1–40
- 5 Badia S, Neiva E, Verdugo F. Robust high-order unfitted finite elements by interpolation-based discrete extension. *Comput Math Appl*, 2022, 127: 105–126
- 6 Badia S, Neiva E, Verdugo F. Linking ghost penalty and aggregated unfitted methods. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2022, 388: 114232
- 7 Badia S, Verdugo F, Martín A F. The aggregated unfitted finite element method for elliptic problems. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2018, 336: 533–553
- 8 Becker R. Mesh adaptation for Dirichlet flow control via Nitsche's method. *Commun Numer Methods Eng*, 2002, 18: 669–680
- 9 Belytschko T, Moës N, Usui S, et al. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Internat J Numer Methods Engrg*, 2001, 50: 993–1013
- 10 Blyth M G, Pozrikidis C. A Lobatto interpolation grid over the triangle. *IMA J Appl Math*, 2006, 71: 153–169
- 11 Bonito A, Guermond J L, Luddens F. An interior penalty method with C^0 finite elements for the approximation of the Maxwell equations in heterogeneous media: Convergence analysis with minimal regularity. *ESAIM Math Model Numer Anal*, 2016, 50: 1457–1489
- 12 Bonito A, Nochetto R H. Quasi-optimal convergence rate of an adaptive discontinuous Galerkin method. *SIAM J Numer Anal*, 2010, 48: 734–771
- 13 Bordas S, Burman E, Larson M, et al. Geometrically Unfitted Finite Element Methods and Applications. New York: Springer, 2018
- 14 Burman E. Ghost penalty. *C R Math Acad Sci Paris*, 2010, 348: 1217–1220
- 15 Burman E, Cicuttin M, Delay G, et al. An unfitted hybrid high-order method with cell agglomeration for elliptic interface problems. *SIAM J Sci Comput*, 2021, 43: 859–882
- 16 Burman E, Claus S, Hansbo P, et al. CutFEM: Discretizing geometry and partial differential equations. *Internat J Numer Methods Engrg*, 2015, 104: 472–501
- 17 Burman E, Elfverson D, Hansbo P, et al. A cut finite element method for the Bernoulli free boundary value problem. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2017, 317: 598–618
- 18 Burman E, Elfverson D, Hansbo P, et al. Shape optimization using the cut finite element method. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2018, 328: 242–261
- 19 Burman E, Ern A. An unfitted hybrid high-order method for elliptic interface problems. *SIAM J Numer Anal*, 2018, 56: 1525–1546
- 20 Burman E, Hansbo P. Fictitious domain finite element methods using cut elements: I. A stabilized Lagrange multiplier method. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2010, 199: 2680–2686
- 21 Burman E, Hansbo P. Fictitious domain finite element methods using cut elements: II. A stabilized Nitsche method.

- Appl Numer Math*, 2012, 62: 328–341
- 22 Burman E, Hansbo P, Larson M G. CutFEM based on extended finite element spaces. *Numer Math*, 2022, 152: 331–369
- 23 Burman E, Hansbo P, Larson M G, et al. Extension operators for trimmed spline spaces. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 2023, 403: 115707
- 24 Chen L, Wei H, Wen M. An interface-fitted mesh generator and virtual element methods for elliptic interface problems. *J Comput Phys*, 2017, 334: 327–348
- 25 Chen Z, Li K, Xiang X. An adaptive high-order unfitted finite element method for elliptic interface problems. *Numer Math*, 2021, 149: 507–548
- 26 Chen Z, Liu Y. An arbitrarily high order unfitted finite element method for elliptic interface problems with automatic mesh generation. arXiv:2209.13857v3, 2022
- 27 Chen Z, Liu Y, Xiang X. A high order explicit time finite element method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients. arXiv:2112.02867v2, 2023
- 28 Chen Z, Xiao Y, Zhang L. The adaptive immersed interface finite element method for elliptic and Maxwell interface problems. *J Comput Phys*, 2009, 228: 5000–5019
- 29 Chen Z, Zou J. Finite element methods and their convergence for elliptic and parabolic interface problems. *Numer Math*, 1998, 79: 175–202
- 30 Ciarlet P. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam: North-Holland, 1978
- 31 de Prenter F, Verhoosel C V, van Zwieten G J, et al. Condition number analysis and preconditioning of the finite cell method. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 2017, 316: 297–327
- 32 Di Stolfo P, Schröder A, Zander N, et al. An easy treatment of hanging nodes in hp -finite elements. *Finite Elem Anal Des*, 2016, 121: 101–117
- 33 Gürkan C, Sticko S, Massing A. Stabilized cut discontinuous Galerkin methods for advection-reaction problems. *SIAM J Sci Comput*, 2020, 42: A2620–A2654
- 34 Hansbo A, Hansbo P. An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 2002, 191: 5537–5552
- 35 Heimann F, Engwer C, Ippisch O, et al. An unfitted interior penalty discontinuous Galerkin method for incompressible Navier-Stokes two-phase flow. *Internat J Numer Methods Fluids*, 2013, 71: 269–293
- 36 Huang P, Wu H, Xiao Y. An unfitted interface penalty finite element method for elliptic interface problems. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 2017, 323: 439–460
- 37 Isaac T. Recursive, parameter-free, explicitly defined interpolation nodes for simplices. *SIAM J Sci Comput*, 2020, 42: A4046–A4062
- 38 Johansson A, Larson M G. A high order discontinuous Galerkin Nitsche method for elliptic problems with fictitious boundary. *Numer Math*, 2013, 123: 607–628
- 39 Li Z. The immersed interface method using a finite element formulation. *Appl Numer Math*, 1998, 27: 253–267
- 40 Li Z, Lin T, Wu X. New Cartesian grid methods for interface problems using the finite element formulation. *Numer Math*, 2003, 96: 61–98
- 41 Lin T, Lin Y, Zhang X. Partially penalized immersed finite element methods for elliptic interface problems. *SIAM J Numer Anal*, 2015, 53: 1121–1144
- 42 Massing A, Larson M G, Logg A, et al. A Nitsche-based cut finite element method for a fluid-structure interaction problem. *Commun Appl Math Comput Sci*, 2015, 10: 97–120
- 43 Massjung R. An unfitted discontinuous Galerkin method applied to elliptic interface problems. *SIAM J Numer Anal*, 2012, 50: 3134–3162
- 44 Mittal R, Iaccarino G. Immersed boundary methods. *Annu Rev Fluid Mech*, 2005, 37: 239–261
- 45 Nitsche J. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh Math Semin Univ Hambg*, 1971, 36: 9–15
- 46 Perugia I, Schötzau D. An hp -analysis of the local discontinuous Galerkin method for diffusion problems. *J Sci Comput*, 2002, 17: 561–571
- 47 Proriol J. Sur une famille de polynomes à deux variables orthogonaux dans un triangle. *C R Acad Sci Paris*, 1957, 245: 2459–2461
- 48 Schott B, Rasthofer U, Gravemeier V, et al. A face-oriented stabilized Nitsche-type extended variational multiscale method for incompressible two-phase flow. *Internat J Numer Methods Engrg*, 2015, 104: 721–748
- 49 Schwab Ch. p - and hp - Finite Element Methods. New York: Oxford University Press, 1998
- 50 Wu H J, Xiao Y M. An unfitted hp -interface penalty finite element method for elliptic interface problems. *J Comput Math*, 2019, 37: 316–339

- 51 Xiao Y, Xu J, Wang F. High-order extended finite element methods for solving interface problems. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2020, 364: 112964

An arbitrarily high-order finite element method on arbitrarily shaped domains with automatic mesh generation

Zhiming Chen & Yong Liu

Abstract In this paper, we first review the recent progress of unfitted finite element methods for solving elliptic equations on domains with complex geometry. Then we propose an arbitrarily high-order conforming unfitted finite element method defined on automatically generated induced meshes from Cartesian meshes with hanging nodes. The induced mesh allows us to use a simple treatment of the hp finite element method to deal with the hanging nodes to construct a high-order conforming finite element space. Nitsche techniques are used to deal with the Dirichlet boundary conditions. The stability and the hp *a priori* error estimates of our methods are established. Numerical examples confirm our theoretical findings.

Keywords unfitted finite element, hp *a priori* error estimate, automatic mesh generation

MSC(2020) 65N30

doi: 10.1360/SSM-2023-0042