多相多组分渗流模拟软件项目 OpenCAEPoro

张晨松,中科院数学院

2023年04月21日,内部交流版

AMSS, Chinese Academy of Sciences





01

Significance and background of reservoir simulation







能源困局













地热开发、二氧化碳埋存





Domain & Topo

Florida Bav

研究目标:为相关应用场景,提供一个开源、现代化、高效、并行模拟软件包

油气开发工程中的应用





• 难点:多介质、多尺度、多物理、不确定性、高分辨率、.....

- 精细的数值模拟需要更符合物理的模型,更高的空间、时间分辨率,所以常需要大规模并行模拟
- 大规模油气勘探开发数值模拟是超算的主要发展动力之一
- 国际大型石油公司拥有世界一流的HPC计算资源(硬件、软件、人才)

Philippe Ricoux (TOTAL R&D Senior Scientist)于2018年在中科院计算数学所的报告

•

地热能源开发中的应用



- 2020年9月22日,习近平总书记提出:二氧化碳排放力争于2030年前达到峰值,争 取于2060年前实现碳中和;2030年的目标是单位国内生产总值二氧化碳排放量比 2005年下降65%以上
- 2021年1月28日,国家发改委能源所发布《2020中国可再生能源展望报告》
 地热资源是一种清洁环保的非化石能源,也是稳定可靠的本土能源,开发利用不受地缘政治、季节、昼夜、气候等因素影响,可作为基础能源





地热开发需要模拟多重介质(如裂隙介质与多孔介质)中的多相、多组分渗流与热量运移(多物理场耦合问题)
 国外可用于地热模拟的软件包括美国的Tough、德国的OGS和FEFLOW、加拿大的CMG、瑞典的COMSOL等
 国内尚无成熟的、完全自主的地热数值模拟软件,针对地热数值模拟的软件主要有中国科学院地质与地球物理研究所研发的地热计算器(调用OGS模块,不能商用)

二氧化碳地质储存中的应用





- 二氧化碳地质封存具有存储容量大、存储时间长、成熟技术可迁移、可与二氧化碳利用相结合等优点
- 地质储存面临着长时间封存泄漏的风险,需要大量数值模拟进行风险评估,并进行日常泄漏监测
- CCS和CCUS技术是碳中和为地球物理行业带来的重要机遇,但碳捕集与封存的代价目前仍很高

参考文献:赵改善《地学新视野》,2021











数值模拟中的困难与挑战



中东某碳酸盐岩油藏(魏晨吉、韩如冰, CNPC & ADNOC):短轴背斜,构造油藏,饱和油藏(发育气顶)
 原油粘度低,高孔低渗:孔隙类型以粒间孔、粒内孔、粒间溶孔、粒内溶孔为主
 动态模型对非均质性表征程度不理想,导致常规模型适用性受限:在定产的情况下,全油藏气油比、含水

率等关键参数拟合效果差,井底流压数模计算值与实际测试值存在较大偏差





不同性质的多相流体





20

°API Gravity

不同尺度的流动模态











°____



April 23, 2023









- 实际应用中,网格较为复杂:结构网格、PEBI网格、无结构网格、局部加密网格、混合网格等
- 井方程的变量个数与油藏网格块对应的变量个数可能不一致

学术界科研数值模拟软件









Open-source software development projects



OpenCAEPoro软件开发团队



当前版本贡献者

- 张晨松, 中科院数学院
- 李仕哲,中科院数学院
- 沈博芊,中科院数学院
- 赖 婷,湘潭大学
- 冯春生,湘潭大学
- •赵梨,湘潭大学
- 张林杰,湘潭大学
- 刘生豪,湘潭大学
- 程晓行,深圳大数据研究院
- 张 炼,深圳大数据研究院

早期版本贡献者

- 乔长河, 宾州州立大学
- 张鸿轩, 宾州州立大学
- 齐浩然, 宾州州立大学
- 胡潇喆 , Tufts University
- 关文超,中山大学
- 李 政,湘潭大学
- 王锦东,北京大学
- 王 慧,湘潭大学



https://github.com/OpenCAEPlus/OpenCAEPoro

OpenCAEPoro软件设计目标



- 方便与其它模型的耦合作用
- 方便组分间的化学反应
- 方便更换EOS模型
- 方便支持不同网格类型
- 方便更换闪蒸计算算法
- 方便发展新型隐式/半隐式方法
- 方便发展新型离散方法
- 方便发展新型求解方法
- 方便进行底层的性能优化

- 适应分布式异构并行环境
- 增强接口灵活性, 配合嵌套分布式并行调用
- 由任意解法器调用任意解法器作为预条件
- 对接底层稀疏数学库
- 增强程序的可读性和可维护性
- 重新设计报错信息
- 重新设计单元测试和回归测试
- 增加必要的文档
- 利用C++减少冗余代码







°____



OpenCAEPoro软件整体结构







OpenCAEPoro软件整体结构













分布式并行程序设计







•

•



分布式并行模拟流程





1. 串行地读取输入文件是潜在的瓶颈所在,这一块也是绝大部分软件所缺失的。但更大的问题在于串行地对一般网格的前处理——得到网格信息和连接关系,需要进一步分析和研究。

2. 在模拟过程中,油藏的状态不断发生变化,每个网格上的计算量以及网格间的联通强弱也在不断发生变化,难以在整个模拟过程中始终保持各进程的负载均衡或是达到具有某种优势的网格剖分,随着进程数的

增加负载不平衡的影响会逐渐趋于主导地位。

3. 解法器的并行效率是整个模拟过程能否高效并行的关键。



















April 23, 2023









・串并行实现

串行、OpenMP , GPU , MPI

- ・模型方程 (現本)
- ・多相流体
 単相、两相、三相
- ・算法框架
 - FIM、IMPEC、Improved IMPEC
- **离散网格** 正交网格、角点网格

• 测试问题 理论模型、SPE标准算例、实际油田算例

正确性 稳健性 稳定性

收敛性

高效性

可用性





TABLE 17.1—SPE COMPARATIVE SOLUTION PROJECT PROBLEMS

- SPE1 Three-phase black oil 10×10×3 300-block grid 3,650-day depletion with gas injection
- SPE2 Three-phase black oil
 - 10×1×15 150-block *r-z* grid 900-day single-well coning depletion
- SPE3 Nine-component retrograde gas
 - 9×9×4 324-block grid
 - 5,480-day cycling and blowdown
- SPE4 Cyclic steam injection and steam displacement of heavy oils
- SPE5 Six-component volatile oil
 - 7×7×3147-block grid
 - 20-year WAG injection
- SPE6 Three-phase black oil
 - Single-block and cross-sectional dual porosity with drainage and gas and water injection cases
- SPE7 Three-phase black oil 9×9×6 486-block grid with horizontal wells
 - Eight 1,500-day injection-production cases
- SPE8 Two-phase gas-oil black oil
- 10×10×4 400-block grid
 - Comparison of 2,500-day 400-block grid results with 20-block unstructured and locally refined grid results
- SPE9 Three-phase black oil

 $24{\times}25{\times}15$ 9,000-block 25-well grid with geostatistical description

900-day depletion

SPE10 Model 1: Two-phase gas-oil case with a 2,000-block 100×1×20 grid and gas injection to 2000 days

Model 2: Two-phase water-oil case with a 1.12-million block 60×220×85 grid and water injection to 2,000 days

Both models have geostatistical descriptions

- 1) Odeh, A.S. 1981. Comparison of Solutions to a Three-Dimensional Black-Oil Reservoir Simulation Problem. J Pet Technol 33 (1): 13–25. SPE-9723-PA.
- 2) Weinstein, H.G., Chappelear, J.E., and Nolen, J.S. 1986. Second Comparative Solution Project: A Three-Phase Coning Study. J Pet Technol 38 (3): 345-353. SPE-10489-PA.
- 3) Kenyon, D. 1987. Third SPE Comparative Solution Project: Gas Cycling of Retrograde Condensate Reservoirs. J Pet Technol 39 (8): 981-997. SPE-12278-PA.
- 4) Aziz, K., Ramesh, A.B., and Woo, P.T. 1987. Fourth SPE Comparative Solution Project: Comparison of Steam Injection Simulators. J Pet Technol 39 (12): 1576–1584. SPE-13510-PA.
- 5) Killough, J.E. and Kossack, C.A. 1987. Fifth Comparative Solution Project: Evaluation of Miscible Flood Simulators. Presented at the SPE Symposium on Reservoir Simulation, San Antonio, Texas, 1–4 February. SPE-16000-MS.
- 6) Firoozabadi, A. and Thomas, L.K. 1990. Sixth SPE Comparative Solution Project: Dual-Porosity Simulators. J Pet Technol 42 (6): 710-715, 762-763. SPE-18741-PA.
- 7) Nghiem, L., Collins, D.A., and Sharma, R. 1991. Seventh SPE Comparative Solution Project: Modelling of Horizontal Wells in Reservoir Simulation. Presented at the SPE Symposium on Reservoir Simulation, Anaheim, California, 17-20 February 1991. SPE-21221-MS.
- Quandalle, P. 1993. Eighth SPE Comparative Solution Project: Gridding Techniques in Reservoir Simulation. Presented at the SPE Symposium on Reservoir Simulation, New Orleans, Louisiana, 28 February-3 March 1993. SPE-25263-MS.
- 9) Killough, J.E. 1995. Ninth SPE Comparative Solution Project: A Reexamination of Black-Oil Simulation. Presented at the SPE Reservoir Simulation Symposium, San Antonio, Texas, USA, 12–15 February. SPE 29110.
- 10) Christie, M.A. and Blunt, M.J. 2001. Tenth SPE Comparative Solution Project: A Comparison of Upscaling Techniques. SPE Res Eval & Eng 4 (4): 308–317. SPE-72469-PA.

https://petrowiki.spe.org/Reservoir_simulation











SPE1A标准算例:非混相注气驱



NCMIS



















OCP_IMPEC_1

— – E100 10

600

600

OCP_FIM_10

800

OCP_IMPEC_1

OCP_FIM_10

800

- E100_10

FIM NR: 211 (+92) LS: 3033(+1108) LStime: 9.3s (51%) Total: 18.4s



NCMIS

SPE3标准算例:十组分回注







SPE5标准算例:七组分挥发油







1000 2000 3000 4000 5000 6000 7000

Days

0

0

Well: 2
Year: 20
IMPEC
NR: 10834 (+62)
LS: 17371 (+124)
LStime: 1.2s (8%)
Total: 15.3s

Grid: 7*7*3

FIM(50) NR: 860 (+45) LS: 2766 (+185) LStime: 7.4(83%) Total: 8.9s

(MSCF/DAY)

FGPR

1e3







SPE5标准算例:网格加密





Total: 855.7s


°____







Year: 50

LS: 1385 (+129)

Total: 430s

LStime: 197s (45.8%)



















STGEO015加密算例:非等温





基于CMG-STARS的算例stgeo015构造:油田区域的水平方向为边长909.05ft的正方形,垂向 厚度为40ft。初始状态下,参考深度(5010ft)的油压为3035psia,初始油饱和度1,初始 水饱和度0。为了对比方便,所有模拟均使用BILU(1)作为预条件方法。

mesh1: 5×5×2, mesh2: 11×11×5, mesh3: 23×23×11, mesh4: 47×47×23

模拟器	解法器	网格	总时间步数	线性迭代步数	模拟时间(秒)
ОСР	vFGMRES	1	46	276	0.103
		2	46	518	0.422
		3	47	907	3.870
		4	46	1626	61.262
	BiCGstab	1	46	179	0.099
		2	46	363	0.397
		3	47	705	4.203
		4	46	1268	68.673
CMG	BiCGstab	1	46	210	11
		2	46	484	10
		3	47	850	14
		4	48	1330	54













SPE6标准算例:DP模型、GRAVDR



NCMIS



数值方法

Numerical methods for porous media flows











全隐式方法 + 向后Euler时间离散 + 自适应时间步长 + Newton线性化 + 无结构网格 + TPF有限体积法 + 上游加权 + 拟Newton法 + 半解析解耦方法 + 多阶段预条件 + FGMRES















$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \sum_{j=1}^{n_p} x_{ij} \xi_j S_j \right) + \nabla \cdot \mathbf{F}_i - \sum_{j=1}^{n_p} S_j r_{ij} = Q_i, \qquad i = 1 : n_c \quad \text{物质守恒}$$

 $\neg n_m$

 $\mathbf{F}_{i} = \sum_{j=1}^{n_{p}} \left(x_{ij}\xi_{j}\mathbf{u}_{j} - S_{j}\mathbf{D}_{j}\nabla(\xi_{j}x_{ij}) \right), \qquad i = 1: n_{c} \quad \hat{\mathbf{m}} \equiv \hat{\mathbf{D}} \in \mathcal{F}_{ij}$

$$\mathbf{u}_{j} = -rac{\kappa \kappa_{rj}}{\mu_{j}} (
abla P_{j} - \gamma_{j}
abla z), \qquad j = 1: n_{p}$$
 Darcy定律

目标:为工程和科 学研究提供更丰富、 更精确的物理模型 选择

$$\sum_{j=1}^{n_p} S_j = 1,$$
 饱和度天系
 $\sum_{i=1}^{n_c} x_{ij} = 1,$ $j = 1 : n_p$ 组分比例关系
 $P_1 - P_j = P_{c1j},$ $j = 2 : n_p$ 表面张力

$$f_{ij} = f_{i1}, \quad i = 1: n_c, \ j = 2: n_p$$
 相平衡方程



NCMIS

非等温模型

非Darcy模型

吸附解吸模型

岩石溶解模型

岩石力学方程





物质守恒

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_w}{B_w} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{B_w} \mathbf{u}_w \right) + \tilde{q}_W$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_o}{B_o} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{B_o} \mathbf{u}_o \right) + \tilde{q}_O$$

Darcy定律

$$\mathbf{u}_j = -\frac{\kappa \kappa_{rj}}{\mu_j} \Big(\nabla P_j - \gamma_j \nabla z \Big), \quad j = o, w$$

其它关系式

$$S_w + S_o = 1$$
$$P_{cow} = P_o - P_w$$

方程的数学性质: Trangenstein, Bell SINUM 1989; SISC 1989













可以利用这些关系式来给出组分模型框架 下的黑油模型,并在统一的程序框架内对 黑油和组分模型进行模拟!

物质守恒

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_w}{B_w} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{B_w} \mathbf{u}_w \right) + \tilde{q}_W$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_o}{B_o} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{B_o} \mathbf{u}_o \right) + \tilde{q}_O$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_g}{B_g} + \phi \frac{R_s S_o}{B_o} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{B_g} \mathbf{u}_g + \frac{R_s}{B_o} \mathbf{u}_o \right) + \tilde{q}_G$$
Darcy定律

$$\mathbf{u}_j = -\frac{\kappa \kappa_{rj}}{\mu_j} \left(\nabla P_j - \gamma_j \nabla z \right), \quad j = o, w, g$$
其它关系式

$$S_o + S_g + S_w = 1$$

$$P_{cog} = P_o - P_g$$

$$P_{cow} = P_o - P_w$$







问题:如何确 定混合物的物 质处于什么相 态?存在多少 相?是否处于 稳定的平衡状 态?某一具体 的相中包含了 多少种物质? 以及包含了多 少该物质?

Van der Waals / Redlich–Kwong / Redlich–Kwong–Soave EOS:

$$P_j := \frac{RT}{V_j - b_j} - \frac{a_j}{V_j(V_j + b_j)}, \quad j = o, g$$

- ✓ 基于RR方程的闪蒸计算
- ✓ 基于Gibbs自由能最小化

Peng–Robinson EOS: [Peng, Robinson 1976]

$$P_j := \frac{RT}{V_j - b_j} - \frac{a_j}{V_j(V_j + b_j) + b_j(V_j - b_j)}, \quad j = o, g$$

Change of variables:

$$A_j := \frac{a_j P_j}{R^2 T^2}, \quad B_j := \frac{b_j P_j}{R T}, \quad Z_j := \frac{P_j V_j}{R T}$$

$$Z_j^3 - (1 - B_j)Z_j^2 + (A_j - 2B_j - 3B_j^2)Z_j - (A_jB_j - B_j^2 - B_j^3) = 0$$

Fugacity:





双重介质的DPDP模型







ACTUAL RESERVOIR

MODEL RESERVOIR

(单相)DPDP模型:

$$\begin{split} \phi_m C_{mt} \; \frac{\partial p_m}{\partial t} - \nabla \cdot \frac{k_m}{\mu} \; \nabla p_m &= -Q \\ \phi_f C_{ft} \; \frac{\partial p_f}{\partial t} - \nabla \cdot \frac{k_f}{\mu} \; \nabla p_f &= Q + q_p \end{split}$$

 ϕ_m/ϕ_f : porosities C_{mt}/C_{mt} : compressibilities p_m/p_f : pressures k_m/k_f : permeabilities μ : dynamic viscosities q_p : sink/source term $Q = \frac{\sigma k}{\mu} (p_m - p_f)$:mass exchange σ : shape factor





裂缝与溶洞等介质的常用模型

Ω,

Ω,

 $\partial \Omega$.

_

 $\nabla \cdot \mathbf{u} = g,$

 $\mathbf{u} = \mathbf{0},$

 Γ_2

 Ω_2

$$\begin{split} \mathbf{u} &= -\kappa \, \nabla p_P, \qquad \Omega_P, \\ -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p_F &= \mathbf{f}, \qquad \Omega_F, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= g, \qquad \Omega_F, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} &= g, \qquad \Omega, \\ \mathbf{u}_F \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{u}_P \cdot \mathbf{n}, \qquad \Gamma, \\ \mathbf{p}_F - 2\mu (\nabla \mathbf{u}_F \, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} &= p_P, \qquad \Gamma, \\ \mathbf{u}_F \cdot \mathbf{t} &= -2\beta \mu \left(\nabla \mathbf{u}_F \, \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{t}, \qquad \Gamma, \end{split}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0,$$
 $\partial \Omega.$

$$\mathbf{u}_i = -\kappa_i \, \nabla p_i, \qquad \qquad \Omega_i, \ i = 1, 2$$

$$abla \cdot \mathbf{u}_i = f_i, \qquad \qquad \Omega_i, \ i = 1, 2$$

$$egin{aligned} \mathbf{u}_f &= -\kappa_{f, au} \mathbf{d} \,
abla_ au p_f, & \gamma, \ \mathbf{Discrete\ Fracture\ Model} \
abla_ au \cdot \mathbf{u}_f &= f_f + (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2)|_\gamma, & \gamma, \end{aligned}$$

$$-\xi \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \alpha_f p_1 = \alpha_f p_f - (1 - \xi) \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2, \qquad \gamma,$$

$$-\xi \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 + \alpha_f p_2 = \alpha_f p_f - (1 - \xi) \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1, \qquad \gamma,$$



 Γ_f

 γ_2

 γ_1





 $-\nabla \cdot (\mu(x)\nabla \mathbf{u}) + \kappa^{-1} \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f},$

Brinkn

















求解非线性方程组,使得耦合的方程组成立,该过程对时间步长和初值非常敏感:

- 计算主变量(非线性方程组)
- 检查混合物相态(单相?两相?多相?稳定?)
- 对多相情况进行闪蒸计算(非线性代数方程)
- 更新变量,自动选择时间步长(根据后验误差、非线性迭代次数、线性迭代次数、.....)



时间步长自适应选择方法















更新混合物状态





http://saylordotorg.github.io/text_generalchemistry-principles-patterns-andapplications-v1.0/index.html

°____



相平衡计算非线性方程求解





可将两种迭代法(不 动点迭代与牛顿迭代) 结合起来:首先使用 SSM方法,收敛到一 定程度之后,切换到 Newton法, 增强迭代 法的稳健性

否

是



离散裂缝模型的MHDFM方法

Macro elements

(9, 9)

(9, 0)

No-Floy

No-Flow





- Downscaling: The fine-scale behavior of solution is captured by solving local flow equations at the interior of the macro elements
- Upscaling: The fine-scale properties are transferred to a small global problem associated with the fluxes

Case	DFM	MHDFM	Diff
1	1.2876	1.2843	2.56e-3
2	1.6122	1.6081	2.54e-3
3	1.2724	1.2661	4.95e-3
4	1.4070	1.3940	9.24e-3

Darcy-Darcy-Stokes模型的DG方法





 $\begin{aligned} & -\nabla \cdot \left(\mu (\nabla \mathbf{u}_F + \nabla^T \mathbf{u}_F) - p_F \mathbf{I} \right) = \mathbf{f} & \text{in} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_F = 0 & \text{in} \\ & -\nabla \cdot (\kappa \nabla p_P) = f_P & \text{in} \\ & -\nabla_\tau \cdot (\kappa_{f,\tau} d\nabla_\tau p_f) = f_f + [-\kappa \nabla p_P] \cdot \mathbf{n}_f & \text{in} \\ & \mathbf{u}_F \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_P \cdot \mathbf{n} & \text{on} \\ & p_F - \mathbf{n} \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u}_F + \nabla^T \mathbf{u}_F) \cdot \mathbf{n}) = p_P & \text{on} \\ & -\mathbf{t} \cdot (\beta \mu (\nabla \mathbf{u}_F + \nabla^T \mathbf{u}_F) \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_F & \text{on} \\ & \mathbf{u}_f \cdot \tau_f = \mathbf{u}_F \cdot \mathbf{n} & \text{on} \\ & -2\{\kappa \nabla p_P\} \cdot \mathbf{n}_f = \alpha_f [p_P] & \text{on} \\ & -[\kappa \nabla p_P] \cdot \mathbf{n}_f = \frac{2\alpha_f}{2\varepsilon - 1} (\{p_P\} - p_f) & \text{on} \end{aligned}$













- 快速线性解法器同时是大规模计算中的主要瓶颈,形成**高效、通用、可扩展**的线性解法器软件是一个难题
- 快速线性解法器是大规模数值模拟的重要组件,在一些应用问题的数值模拟中占用了80%以上的时间
- 对超算硬件的性能排名(如HPC TOP500)常采用线性解法器作为Benchmark(如HPL、HPCG等)



线性解法器最优算法的重要性



- 对超算硬件的性能排名(如HPC TOP500)就常采用线性解法器的性能作为标准(如HPL、HPCG等)
- 线性解法器是大规模数值模拟的重要部分,在很多全隐式油藏数值模拟问题中占用了80%以上的时间
- 同时,线性解法器也是并行计算中的主要瓶颈,形成高效、通用、可扩展的线性解法器软件是一个公认的难题

	网格剖分	64x64x64			128x128x128	256x256x256	512x512x512
<u> </u>	变量个数	274,625			2,146,689	16,974,593	135,005,697
稀疏直接法软件	计算核数	8x1	16x1	32x1	16x8	16x64	16x512
北京超级云超算	求解时间	5.38s	3.86 s	3.26 s	59.78 s	999.46s	内存不足
几何多重网格法 FASP解法器软件 个人笔记本电脑	计算核数	1x1		1x1	1x1	1x1	
	求解时间	0.030s			0.303s	2.815 s	23.54 s

三维Poisson方程(均匀网格七点差分格式)的线性解法器对比,稀疏直接法Pardiso(北京超级云超算)和几何多重网格法 FASP(笔记本电脑):线程数 x 进程数。 2020年,北京超级云计算中心A分区以Linpack测试性能3.74PFlops,获中国HPC TOP100榜单第三名及通用CPU算力第一名。单节点配两块AMD EPYC7452共64核心256GB内存。



科学/工程计算中的预条件方法



基于代数的方法



01.

LU, ILU, SAI, ...

纯代数,通用性强,稳健性 高,用户友好;效率一般不 高,并行可扩展性较差。



02.

DDM, RAS, FETI-DP, ...

可以基于网格进行,效率高, 通用性较强,可扩展性较强; 难以兼顾通用性与最优性。



03.

Block Preconditioners

算法灵活,基于成熟算法开 发,效率高,可扩展性强; 通用性弱,用户友好度差。



求解全隐式离散方程中的困难



- 全隐式模拟中,线性方程组求解时间常常超过80%!
- 全隐式模拟方法稳健、可用较大的时间步长,但会给线性代数方程求解带来很多困难











。 —



网格与线性解法器收敛性





基于SPE1A标准算例构造:油田区域的水平方向为边长10000ft的正方形,垂向 厚度为100ft。初始状态下,参考深度(8400ft)的油压为4800psia,初始油饱 和度0.88,初始水饱和度0.12;平衡状态油水界面为8500ft,油气界面为7000ft

(mesh1: 20×20×10, mesh2: 40×40×20, mesh3: 80×80×40)

	求解器	网杯	各 总时间步数	总线性迭代数	线性求解时间 (秒)	模拟时间 (秒)
		1	$145 \ (356)$	$16100 \ (45.2)$	18.801 (87%)	21.543
	BILU(0)		173~(629)	$50406\ (80.1)$	652.123~(94%)	693.709
		3	272 (1227)	$141763\ (115.5)$	14799.249~(96%)	15360.906
			143 (337)	1781 (5.3)	9.681 (81%)	11.956
	MSP	2	$167 \ (547)$	$3098\ (5.7)$	141.640~(80%)	178.143
		3	275~(1244)	7239~(5.8)	2788.746~(83%)	3344.826
4000	预条件	网格	无解耦	ANL 解耦	ABF 解耦	SEM 解耦
		1	16781 (609 秒)	2327 (6.232 秒)	2343 (7.846 秒)	2326 (6.229 秒)
	CPR	2	×	5466 (144.1 秒)	4807 (121.6 秒)	5666 (137.3 秒)
		3	×	13747 (2722 秒)	13834 (2694 秒)	13642 (2726 秒)
		1	×	×	1781 (9.681 秒)	1404 (7.259 秒)
	MSP	2	×	×	3098 (138.0 秒)	2798 (140.0 秒)
		3	×	×	7239 (2789 秒)	7049 (3007 秒)



张晨松,油藏数值模拟中的线性解法器 数值计算与计算机应用,2022,43(1):1-26.









代数多重网格法通过系数矩阵构造
 限制和提升算子,从而得到不同"网
 格层"之间的信息传递方式和粗网格
 问题

- 粗网格自由度:C/F分裂、聚集法
- 插值和限制算子:
 - 确定插值局部区域 稀疏模式
 - 确定插值权系数-获得 P (and R)

● 粗空间解法器:

- 确定粗水平上的求解问题
- 多层迭代: V, W, AMLI, K, ...
- 磨光算子:降低误差的光滑部分
 - 简单通用的光滑子
 - 依赖问题的光滑子



- 非光滑聚集法的插值算子简单,基于聚集法的AMG方法过程更 简单,更容易并行!
- 光滑聚集法AMG的插值算子是在非光滑聚集法AMG的插值算子的基础上左乘一个磨光算子




April 23, 2023



两层网格法的收敛性分析



细网格 粗网格 V-循环 W-循环







- 多层迭代法是高效解法,如GMG,HB,BPX,AMG等
- 几何多层迭代法的收敛性分析相对比较成熟
 - J. Xu & L. Zikatanov, Acta Numerica, 2017: "a rigorous multilevel convergence theory for AMG without using geometric information is still very much an open problem ..."

● 从最优(Optimal)插值算子到理想(Ideal)插值算子

- X. Xu & Z., SINUM, 2018. Math Review: "This interesting and clearly written paper establishes new characterizations (including a sufficient condition, a necessary condition, and an equivalent condition) of the so-called ideal interpolation operator ..."
- •徐雪枫获2018年北京计算数学学会优秀青年论文一等奖

非精确两层网格收敛性分析:给出量化上下界估计

- Y. Notay, SINUM, 2007
- X. Xu & Z., SINUM, accept; SIMAX accept



解耦方法与预条件方法







油藏模拟解法器代码优化



- 中国石油大学(华东)油藏工程系:SimFast模拟器的解法器优化
 - 继承了石油部引进的黑油模拟器代码,进行二次开发
 - 增加前后处理、各种现场应用功能和实用模型等,.....,已经花费了近30年时间

中国石油勘探开发研究院:个性化井网设计软件求解性能测试与优化

- 通过斯坦福大学的Industrial Consortium获得油藏模拟器全套代码
- 18万行代码,消化这些代码比较困难,更重要的是:没有人愿意去读
- 一些算例不能算,一些算法不能算;或者跑一段时间死机,或者跑得很慢……



AMG求解时间		算例A		算例B				
	耗时(秒)	调用次数	加速比	耗时(秒)	调用次数	加速比		
修改前	1705.188 192			2034.765	107			
修改后	7.815	72	219倍	94.475	37	22倍		

预条件方法代码修改(其中一行)前后计算速度对比

FASP线性解法器软件介绍







http://www.multigrid.org/fasp https://github.com/FaspDevTeam/faspsolver https://github.com/FaspDevTeam/faspxx

•



解法器在油藏模拟中的应用



国内外油藏模拟软件

- Monix Energy : Blackoil, Volatile, DPDP (8 tests)
- SOCF, CNOOC : Blackoil, Polymer Flooding (10 tests)
- Simfast, CUP Qingdao : Blackoil (16 tests)
- KarstSim, Sinopec : Carbonate (5 tests)
- Ennosoft : Blackoil, DFN, DPDP (5 tests)
- XXSim, PEClouds : Blackoil, Thermal, Vapor (70 tests)
- PennSim : Compositional (10 tests)
- OpenCAEPoro : Compositional (10 tests)
- HiSim, PetroChina : Blackoil, Compositional (40 tests)

中石油HiSim模拟器



具备地质建模、黑油模拟、组分模拟、裂缝模拟、化学驱模拟 等十大功能模块,已在国内外百余个油藏区块中得到应用,节 省软件购置费用超3亿元。2017年,国资委刊文《打破国外垄 断,中国石油新一代油藏数值模拟软件研制成功》!







No Name				Properties			Ecl1	100	HiSim		
NU	Name		Model	# Total Cells	# Active Cells	Peroid (day)	Newton	Time (min)	Newton	Time (min)	
1	SPE10-2	Two	o-phase	1122000	1094422	2000			295	41.82	
2	SPE9-9k	Blac	ck-oil	9000	9000	900	339	0.12	269	0.20	
3	SPE1	CO	2 flooding	300	300	3656	536	0.04	445	0.08	
4	SPE2	Thr	ee-phase coning	150	150	900	209	0.01	538	0.14	
5	SPE10-3	Blac	ck-oil	1122000	1094422	2000			1462	354.12	
6	SPE6	Dua	l porosity	100	100	7300	306	0.01	322	0.02	
7	DPSP	Dua	l porosity	60984	40294	360	545	2.64	116	0.81	
8	SPE7	Hor	izontal wells	488	488	1500	120	0.01	75	0.02	
9	Voliatle	Exte	ended black-oil	2100	2100	0.694			67	0.03	
10	Zaoyuan	Fiel	d test (black-oil)	417480	143786	10653	3302	105.49	5204	66.20	
11	Jidong	Fiel	d test (black-oil)	335664	154598	10587	1091	139.69	161	4.41	
12	Chengbei	Fiel	d test (black-oil)	1646500	585123	2191	1971	155.57	420	28.47	
13	Daqing1	Fiel	d test (black-oil)	1453248	466913	15616			5227	338.00	
14	Daqing2	Fiel	d test (black-oil)	847895	241474	15096	8562	92.46	3072	88.05	
15	SPE10-10M	Two	o-phase (large-scale)	11220000 10944220		2000			592	962.12	
16	SPE9-9M	Blac	ck-oil (large-scale)	900000	900000	900 —			2460	10932.81	
<u>ار</u>	如用单位		模型	有效	(网格	使用FASP解法器		未	吏用FASP	解法器	
北京	软能创	刻 页岩气		76	2万	61小时		245小时		寸	
PECIC	buds	SPE10		10	9万	0.8	小时		5.5小时		
PECIC	ouds	ids 黑油实例		14	14万		0.28小时		0.78小时		
		•	合作者:李想	!(软能色	则)、Ean	non Zhan	g (PEClo	uds) 等			



自适应线性解法器





三维ICF算例(2020年国防科工局科学挑战专题,合作者:邹海峰、徐小文、莫则尧)





提高日常工作的效率



百万规模黑油问题,夕发朝至,甚至朝发夕至 ——曾经是油藏工程师的梦想 过去需要大规模集群,现在只用笔记本电脑

过去需要几天至几周,现在已在分、秒量级

- 数万至数百万量级自由度的问题仍是目前工程中 最常用需要求解的规模(中小规模)
- 传统的简化模型和算法已不能满足工程师的需要
- 更精细的模型、更复杂的物理、更快速地求解
- 更复杂的计算硬件环境(CPU、GPU、DCU)



°-----°-----



Computing Power

Scale-out



并行油藏模拟的性能瓶颈





- 大规模模拟的主要并行瓶颈:线性方程组求解、非线性迭代、Jacobian矩阵形成、文件读写等
- 求解问题规模扩大,则时间步长更小、非线性迭代次数更多:需尽量保持线性!







Amdahl's Law 1967 如果串行部分占总时间的10%,那并行加速比不可能超 对于大规模系统来说,很多应用程序的强可扩展性是 记10倍

Gustafson-Barsis's Law 1988 对于很多应用来说,更需要的是计算越来越大规模的 当问题规模与计算资源同比例增大S倍时,加速比最高 问题!需要是弱可扩展性,而不是强可扩展性

Gabriel Wittum: HPC Paradox

当购买了大10倍的硬件系统,希望能更快地求解大10 最优算法对于充分发挥HPC效率及实现弱可扩展性至 倍的问题;但现实很残酷,必须有最优算法才可以! 关重要!









定义**并行效率** E = S/k , 我们希望是100%!











算法的复杂度和可扩展性、对多核CPU的利用率、对众核加速卡的利用率、数据传输时间.....













NCMIS

图分割一般有两个主要目标:

- 负载均衡Load Balancing(减少存储代价)
- 最小化切割边或点的数目Minimum Cuts(减少通讯代价)

要同时优化这两个目标是平衡图分割(Balanced Graph Partitioning)问题,是并行计算的基础问题和 热点问题,但这是NP难问题!



- 多层分割算法 (Multi-level Partitioning) 核心思想是:
- 对原图结构进行稀疏化(如随机匹配、重边匹配算法等),降 低原图的大小
- 2) 达到一定节点数量后对缩减后的图结构进行分割(如经典图增
 - 长、贪婪图增长算法等)
- 3) 将分割后的小图还原成原始结构保证每份子图的均衡性

合作者:刘伟峰团队(中国石油大学,北京)



解法器节点内多线/进程并行测试



● 基于一般组分模型框架,实现黑油	节点内№	/IPI多进程	計行测试	(计算数学	学所LSSC-	Ⅳ机器)	
与组分模型的统一处理,完成了组	进程数	1	2	4	8	16	32
分模型多相平衡计算的测试,非线	Newton步数	165	165	166	166	167	162
性方程组解法器的稳健性得到验证	解法器步数	905	912	926	927	940	911
● 多阶段线性解法器在组分模型框架	解法器时间(秒)	9992.0	5259.5	2686.1	1377.7	947.9	360.0
下的适用性和正确性得到初步验证	总计算时间(秒)	21023.4	10285.1	5179.1	2661.1	1616.9	717.3
● 完成几种并行计算平台的测试	并行效率(%)	100	100	101	98.8	81.3	91.6
¹² OpenMP与CUDA加速对比	CPU-GPU/D	CU异构并	行测试(成都超算、	网络中小	论 419机	器)
¹² OpenMP与CUDA加速对比 ¹⁰ 9.8	CPU-GPU/D 计算硬件	cu异构并	行测试(CPU	成都超算、 V100	网络中小 成都	论419机 超算	器) 网络中心
12 10 10 8 6 6	CPU-GPU/D 计算硬件 初次调用求解时间	<mark>CU异构并</mark> (秒)	行测试(CPU 10.97	<mark>成都超算、</mark> V100 0.97	网络中 成都 4.4	论419机 超算 1	器) 网络中心 7.37
12 OpenMP与CUDA加速对比 210s 10 9.8 10.4 8 9.8 10.4 6 464s 4.7 611s 4.7 0000	CPU-GPU/D 计算硬件 初次调用求解时间 加速比(初次调用	<mark>CU异构并</mark> (秒))	行测试(CPU 10.97 —	成都超算、 V100 0.97 11.3	网络中小 成都 4.4 2.	论419机 超算 1	器) 网络中心 7.37 1.5
12 10 10 10 6 6 4 4 2 2 10 8 10.4 9.8 10.4 10.4 9.8 10.4 10.4 9.8 10.4	CPU-GPU/D 计算硬件 初次调用求解时间 加速比(初次调用 再次调用求解时间	<mark>CU异构并</mark> (秒) (秒)	行测试(CPU 10.97 — 10.34	成都超算、 V100 0.97 11.3 0.36	网络中小 成都 4.4 2.4 0.8	论419机 超算 1 5 34	器) 网络中心 7.37 1.5 1.33



解法器节点间多进程并行测试







8000

→ 理想加速比

10000 12000



■天津超算-2.4M/24核 ■广州超算-3M/24核 ■中科院超算-1.5M/36核 ■北京超算云-1.5M/32核



■广州超算-3M/24核 ■天津超算-2.4M/24核 ■中科院超算-1.5M/36核 ■北京超算云-1.5M/32核



合作者:许进超(PSU)、关文超、张永东、许跃生等(中山大学)

April 23, 2023







	SPE10 (60x220x85=1.122M,两相)						SPE1改 (384X320X64=7.864M,三相							
进程数	牛顿迭代	线性迭代	网格更新(s)	矩阵组装(s)	线性求解(s)	总时间(s)	进程数	牛顿迭代	线性迭代	网格更新(s)	矩阵组装(s)	线性求解(s)	总时间(s)	
1	226	2087	101.8 (1)	786.3 (1)	2837.2 (1)	3849.6 (1)	1	28	104	1066.7 (1)	4528.4 (1)	2701.1 (1)	10694.7 (1)	
2	233	2229	52.9 (1.92)	399.7 (1.97)	1795.9 (1.58)	2321.1 (1.66)	2	28	103	532.9 (2.00)	2217.1 (2.04)	1518.1 (1.78)	5612.0 (1.91)	
4	242	2329	27.6 (3.69)	224.2 (3.51)	1111.5 (2.55)	1412.7 (2.73)	4	28	103	269.8 (3.95)	1090.9 (4.15)	913.9 (2.96)	2980.8 (3.59)	
8	238	2647	13.8 (7.38)	109.9 (7.15)	643.2 (4.41)	797.0 (4.83)	8	28	103	140.0 (7.62)	530.7 (8.53)	427.6 (6.32)	1456.4 (7.34)	
16	245	2528	7.5 (13.57)	57.8 (13.60)	364.0 (7.79)	449.2 (8.57)	16	28	104	71.4 (14.94)	266.2 (17.01)	250.7 (10.77)	791.0 (13.52)	
32	241	2782	4.0 (25.45)	29.7 (26.47)	253.6 (11.19)	301.3 (12.78)	32	29	119	37.0 (28.83)	138.4 (32.72)	163.5 (16.52)	474.0 (22.56)	
64	237	3120	5.1 (19.96)	25.1 (31.33)	294.0 (9.65)	344.4 (11.18)	64	27	124	30.0 (35.56)	90.2 (50.20)	145.2 (18.60)	421.1 (25.40)	

北京超算云23区(64核)







	SPE5million (400x400x6=0.96M,8组分)						SPE5改 (767X767X6=3.530M,7组分)							
进程数	牛顿迭代	线性迭代	网格更新(s)	矩阵组装(s)	线性求解(s)	总时间(s)	进程数	牛顿迭代	线性迭代	网格更新(s)	矩阵组装(s)	线性求解(s)	总时间(s)	
1	34	138	144.8 (1)	312.9 (1)	1648.9 (1)	2313.1 (1)	1	40	187	8900.0 (1)	6412.9 (1)	5636.4 (1)	25346.1 (1)	
2	34	140	71.6 (2.02)	149.5 (2.09)	1157.8 (1.42)	1478.1 (1.56)	2	40	193	4427.0 (2.01)	3126.7 (2.05)	3432.4 (1.64)	13326.7 (1.90)	
4	32	139	32.7 (4.43)	71.9 (4.35)	539.6 (3.06)	695.1 (3.33)	4	39	189	2153.1 (4.13)	1490.1 (4.30)	1856.3 (3.04)	6693.0 (3.79)	
8	32	130	16.7 (8.67)	34.9 (8.97)	275.6 (5.98)	354.3 (6.53)	8	39	190	1070.0 (8.32)	728.2 (8.81)	911.6 (6.18)	3283.7 (7.72)	
16	33	145	8.6 (16.83)	17.9 (17.48)	153.9 (10.71)	194.5 (11.89)	16	39	190	536.1 (16.60)	362.7 (17.68)	497.3 (11.33)	1711.7 (14.81)	
32	34	140	4.5 (32.18)	9.3 (33.65)	95.7 (17.23)	118.3 (19.55)	32	39	192	271.0 (32.84)	180.5 (35.53)	321.0 (17.56)	928.0 (27.31)	
64	32	129	3.4 (42.59)	6.6 (47.41)	82.3 (20.04)	101.6 (22.77)	64	39	192	198.9 (44.75)	123.5 (51.93)	320.4 (17.60)	812.1 (31.21)	

北京超算云23区(64核)

预条件方法的自适应初始化



- 相对于商业软件(如tNavigator等)所使用的求解 方法,我们的方法仍过于复杂
- 虽然迭代次数少,对大规模问题有一定的性能优势,但是并行效率提升难度大(ILU和AMG初始化、GS磨光、稀疏三角解、.....)



	μ	1	2	4	8	16
	0	239	239	239	239	239
Cotore Collo	20	188	188	188	188	188
SetupCaus	30	58	58	58	58	58
	40	33	33	33	33	33
	0	11.08%	14.59%	20.63%	29.34%	41.389
Cotom Datio	20	9.45%	12.46%	17.55%	25.45%	38.149
<i>SetupRatio</i>	30	5.19%	6.52%	9.20%	14.05%	26.09
	40	4.05%	4.99%	6.62%	11.03%	21.839
	0	5823	5822	5818	5822	5827
T	20	5855	5854	5853	5855	5857
lter	30	6309	6308	6315	6317	6319
	40	7033	7034	7037	7041	7044
	0	4753.00	2593.07	1491.97	970.26	829.24
Time	20	4821.98	2606.18	1488.95	949.98	804.5
1 une	30	4919.8 1	2617.66	1444.92	877.85	718.1
	40	5475.72	2880.97	1570.72	946.35	769.34
	0	1.00	1.83	3.19	4.90	5.73
Snaadun*	20	0.99	1.82	3.19	5.00	5.91
Speedup	30	0.97	1.82	3.29	5.4 1	6.62
	40	0.87	1.65	3.03	5.02	6.18
	0	1.00	1.83	3.19	4.90	5.73
Speedup	20	1.00	1.85	3.24	5.08	5.99
Speedup	30	1.00	1.88	3.40	5.60	6.8
	40	1.00	1.90	3.49	5.79	7.1:



自适应初始化对结果的影响









Table 4

NumTSteps, NumNSteps, Iter, AvgIter, Time (h), and Speedup comparisons of the OpenMP version of commercial and our simulators for the two-phase SPE10 problem.

Simulators	μ	NT	1	2	4	8	16
		NumTSteps	671	785	891	1031	1100
		NumNSteps	1115	1244	1328	1458	1515
C		Iter	150152	160254	161432	167757	17545
Commercial	-	AvgIter	134.7	128.8	121.6	115.1	115.8
		Time	14.62	8.45	4.71	2.72	1.54
		Speedup	1.00	1.73	3.10	5.37	9.49
		NumTSteps	164	164	164	164	164
		NumNSteps	239	239	239	239	239
	0	Iter	5823	5822	5818	5822	5827
	0	AvgIter	24.4	24.4	24.3	24.4	24.4
		Time	1.48	0.88	0.57	0.43	0.39
		Speedup	1.00	1.68	2.60	3.44	3.79
		NumTSteps	164	164	164	164	164
		NumNSteps	239	239	239	239	239
	20	Iter	5855	5854	5853	5855	5857
	20	AvgIter	24.5	24.5	24.5	24.5	24.5
		Time	1.50	0.88	0.57	0.42	0.38
Ours		Speedup	1.00	1.70	2.63	3.57	3.95
		NumTSteps	164	164	164	164	164
		NumNSteps	239	239	239	239	239
	20	Iter	6309	6308	6315	6317	6319
	30	AvgIter	26.4	26.4	26.4	26.4	26.4
		Time	1.52	0.88	0.56	0.40	0.36
		Speedup	1.00	1.73	2.71	3.80	4.22
		NumTSteps	164	164	164	164	165
		NumNSteps	246	246	246	246	247
	40	Iter	7033	7034	7037	7041	7064
	40	AvgIter	28.6	28.6	28.6	28.6	28
		Time	1.68	0.96	0.60	0.42	0.:
		Speedup	1.00	1.75	2.80	4.00	4.5



GPU版自适应初始化:黑油模型



Table 5

NumTSteps, NumNSteps, Iter, AvgIter, Time (h), and Speedup (compared with the commercial simulator) comparisons of the GPU version of commercial and our simulators for the two-phase SPE10 problem.

Simulators	μ	NumTSteps	NumNSteps	Iter	AvgIter	Time	Speedup
Commercial	nmercial – 1004 1431		170276	119.0	3.070	-	
	0	164	239	5525	23.1	0.387	7.93
01170	20	164	240	5659	23.6	0.358	8.57
Ours	30	165	240	6182	25.8	0.280	10.97
	40	167	244	6740	27.6	0.278	11.05

Ref: Li Zhao, Chunsheng Feng, Chen-Song Zhang, Shi Shu, "Parallel multistage preconditioners with adaptive setup for the black oil model", Computers & Geosciences, 168, 2022.







Table 7 SetupCalls, SetupRatio, Iter, Time (s), and Speedup of the different μ for the SPE5 problem.

Solvers	μ	SetupCalls	SetupRatio	Iter	Time	Speedup
ASMSP-GMRES-SEQ	0	389	16.30%	3747	2601.11	
	0	389	51.43%	3969	341.25	7.62
ASMSP CMRES CUDA	10	186	34.59%	4064	324.76	8.01
ASINSI -GWILES-CODA	15	44	21.72%	4508	313.23	8.30
	20	12	18.01%	4747	314.50	8.27



Table 8 NumTSteps, NumNSteps, Iter, AvgIter, Time (s), and Speedup comparisons of the commercial and our simulators for the SPE5 problem.

Simulators	μ	NumTSteps	NumNSteps	Iter	AvgIter	Time	Speedup
Commercial		382	748	47027	62.9	2339.00	
	0	147	389	3969	10.2	2178.78	1.07
Ours	10	147	389	4064	10.4	2159.22	1.08
Ouis	15	147	389	4508	11.6	2142.22	1.09
	20	147	389	4747	12.2	2143.47	1.09









	Sp	pe10矩阵	sweep10	次(北京	記 第 四 算 云 昭	BSCC-T6)
	线程数	迭代步数	相对残量	setup时间 (秒)	solve时间 (秒)	总时间 (秒)	加速比
	1	7	9.27E-04	5.2847	3.7803	9.0650	
i,j	2	7	9.27E-04	2.6924	2.9536	5.6460	1.61
Algorithm 2: Fine-Grained Parallel Incomplete Factorization	4	7	9.27E-04	1.6642	1.5923	3.2565	2.78
1 Set unknowns l_{ij} and u_{ij} to initial values 2 for $sweep = 1, 2, \ldots$ until convergence do	8	7	9.27E-04	0.9427	0.9902	1.9329	4.69
3 parallel for $(i, j) \in S$ do 4 if $i > j$ then	16	7	9.27E-04	0.7441	0.5898	1.3339	6.80
5 $l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}\right) / u_{jj}$ 6 else	32	7	9.27E-04	0.6717	0.4421	1.1138	8.14
7 $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$ 8 end	48	7	9.27E-04	0.6498	0.4246	1.0744	8.44
9 end 10 end	64	7	9.27E-04	0.7738	0.5747	1.3485	6.72
Ref: Edmond Chow and Aftab Patel. 2015. Fine-Grained Parallel Incomplete	96	7	9.27E-04	2.6111	1.1632	3.7743	2.40

Ы

LU Factorization. SIAM J. Sci. Comput. 37, 2 (2015), C169–C193.

基于拓扑结构化网格的多重网格法









Development plans and conclusion remarks



OpenCAEPoro软件功能开发进度





多相多组分渗流问题大规模数值模拟关键技术



OpenCAEPoro软件开发规划





April 23, 2023

















April 23, 2023

°____







- Linear solvers for petroleum reservoir simulation, C.-S. Zhang, Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 43, 1– 26 (03/2022), in Chinese.
- 2. Convergence analysis of inexact two-grid methods: A theoretical framework, X. Xu and C.-S. Zhang, **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 60, 133–156 (01/2022)
- 3. Multiscale hybrid-mixed finite element method for flow simulation in fractured porous media, P. Devloo, W. Teng, and C.-S. Zhang, **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, 119, 145–163 (04/2019)
- 4. On the ideal interpolation operator in algebraic multigrid methods, X. Xu and C.-S. Zhang, **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 56, 1693–1710 (06/2018).
- 5. Analytical decoupling techniques for fully implicit reservoir simulation, C. Qiao, S. Wu, J. Xu, and C.-S. Zhang, Journal of Computational Physics, 336, 664–681 (05/2017)
- 6. On Robust and Efficient Parallel Reservoir Simulation on Tianhe-2, W. Guan, C. Qiao, H. Zhang, C.-S. Zhang, et al., **SPE Reservoir Characterization and Simulation** Conference and Exhibition, SPE-175602 (08/2015)
- 7. A multilevel preconditioner and its shared memory implementation for a new generation reservoir simulator, S. Wu, J. Xu, C. Feng, C.-S. Zhang, et al., **Petroleum Science**, 11, 540–549 (10/2014)
- 8. Numerical study of geometric multigrid on CPU–GPU heterogenous computers, C. Feng, S. Shu, J. Xu, and C.-S. Zhang, Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 6, 1–23 (01/2014)
- 9. Application of auxiliary space preconditioning in field-scale reservoir simulations, X. Hu, J. Xu, and C.-S. Zhang, Science China Mathematics, 56, 2737–2751 (12/2013)
- 10.Combined preconditioning with applications in reservoir simulation, X. Hu, S. Wu, X.-H. Wu, J. Xu, C.-S. Zhang, S. Zhang, and L. Zikatanov, **Multiscale Modeling and Simulation**, 11, 507–521 (08/2013)