中国科学院计算数学与科学工程计算研究所

博士研究生入学试题 *(*最优化计算方法， *1999.10)*

1. 证明下面结论：假设 $f(x)$ 在 $\Re$ 上的连续可微， $f'(0) < 0$ 而且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有下界, 则对任给的满足于 $0 < c_1 \leq c_2 < 1$ 的常数, 存在 $\alpha > 0$ 使得
$$f(0) - f(\alpha) \geq -c_1 \alpha f'(0)$$
和
$$f(0) - f(\alpha) \leq -c_2 \alpha f'(0).$$

2. $f(x) \in \Re^n$ 的共轭函数定义为： $f^*(\xi) = \sup_x \{\xi^T x - f(x)\}$. 设 $f(x)$ 是 $\Re^n$ 上处处有定义的凸函数, 证明 $f^*(\xi)$ 的共轭函数是 $f(x)$.

3. 假设 $f(x)$ 是 $\Re$ 上的二次连续可微严格凸函数, 分析如下迭代点列的收敛性质:
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}.$$

4. 假设 $f(x)$ 是 $\Re^n$ 上的连续可微函数而且 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$, 考虑如下线搜索的最速下降法：在第 k 次迭代, 线搜索步长 $\alpha_k > 0$ 是序列 $\{1/k, 1/(2k), 1/(2^2k), ...1/(2^jk), ...\}$ 中满足
$$f(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \leq f(x_k)$$
的最大步长. 试分析此算法的收敛性.

5. 用罚函数方法求解 (初始点为 $(0, 0)$):
$$\begin{aligned} \min \quad & -(1 - x_1 - x_2)^2 \\ s.t. \quad & x_1^2 + 2x_2^2 \leq 1. \end{aligned}$$

6. 假设 $g \in \Re^n$, $B \in \Re^{n\times n}$ 是对称矩阵， $M \in \Re^{n\times n}$ 是对称正定矩阵, $\Delta > 0$ 是一正数. 证明 $d \in \Re^n$ 是问题
$$\min_{d\in\Re^n, d^T M d \leq \Delta} g^T d + \frac{1}{2} d^T B d$$
的解当且仅当存在 $\lambda \geq 0$ 使得 $B + \lambda M$ 半正定而且
$$\begin{aligned} (B + \lambda M)d &= -g, \\ d^T M d &\leq \Delta, \\ \lambda(\Delta - d^T M d) &= 0. \end{aligned}$$

7. 设目标函数 $f(x)$ 是 $\Re^n$ 的连续可微凸函数, 证明 BFGS 法在 WOLFE 非精确线搜索下是收敛的。