# 中国科学院计算数学与科学工程计算研究所
# 2000 年招收攻读博士学位研究生试题
# 最优化计算方法 (三小时完成)

1. (10 分) 假设 $f(x)$ 在 $\Re$ 上连续可微， $f'(0) < 0$, 并且 $f'(x)$Lipschitz 一致连续. 对固定的常数 $c_1 \in (0,1)$ 和 $c \in (0,1)$, Armijo 方法令 $\alpha > 0$ 为序列 $\{1, c, c^2, c^3, ...\}$ 中第一个满足
$$f(\alpha) \le f(0) + c_1 \alpha f'(0)$$
的数. 证明该 $\alpha$ 满足 $\alpha \ge c_2 \min\{1, -f'(0)\}$, 其中， $c_2 > 0$ 仅与 $f'(x)$ 的 Lipschitz 常数有关.

2. (10 分) $f(x) \in \Re^n$ 的共轭函数定义为： $f^*(\xi) = \sup_x\{\xi^T x - f(x)\}$. 设 $f(x)$ 是 $\Re^n$ 上处处有定义的凸函数, 证明 $f^*(\xi)$ 的共轭函数是 $f(x)$.

3. (15 分) 假设 $f(x)$ 是 $\Re$ 上的二次连续可微函数, 分析如下迭代点列的收敛性质：
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}.$$

4. (15 分) 假设 $f(x)$ 是 $\Re^n$ 上的连续可微函数且下方有界, 设 $\{x_k, k = 1, 2, ...\}$ 由 Wolfe 非精确搜索下的最速下降法产生. 证明: 如果算法不有限中止, 则 $\lim_{k\to\infty} \|f'(x_k)\| = 0$.

5. (15 分) 对于等式约束问题：
$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ s.t. & c_i(x) = 0, \qquad i = 1, ..., m. \end{array}$$
$L_1$ 罚函数是 $P_1(x) = f(x) + \sigma \sum_{i=1}^m |c_i(x)|$. 试解释为什么称它为精确罚函数.

6. (15 分) 假设 $g \in \Re^n$, $B \in \Re^{n\times n}$ 是对称矩阵， $M \in \Re^{n\times n}$ 是正定矩阵， $\Delta > 0$ 是一正数. 证明 $d \in \Re^n$ 是问题
$$\min_{d\in\Re^n, d^T M d \le \Delta} g^T d + \frac{1}{2} d^T B d$$
的解当且仅当存在 $\lambda \ge 0$ 使得 $B + \lambda M$ 半正定而且
$$\begin{aligned} (B + \lambda M)d &= -g, \\ d^T M d &\le \Delta, \\ \lambda(\Delta - d^T M d) &= 0. \end{aligned}$$

7. (20 分) 设目标函数 $f(x)$ 是 $\Re^n$ 上的连续可微一致凸函数, 证明 DFP 方法在精确线搜索下是收敛的。