样条函数

1 样条函数

设给定一组结点

$$-\infty = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = \infty \tag{1}$$

我们设 S 为满足下面条件的分段函数：

1. 在每个区间 $[x_j, x_{j+1}], j = 0, \ldots, N$ 上， S 是一个次数不超过 n 的多项式；
2. S 在 $(-\infty, \infty)$ 上具有直到 $n-1$ 阶的导数。

我们称 S 为 n 次样条函数. 我们把以 (1) 为结点的 n 次样条函数空间的总体记为 $S_n(x_1, \ldots, x_N)$ 。自然，我们关心 $S_n(x_1, \ldots, x_N)$ 的维数与基底。

定理 1 $\dim S_n(x_1, \ldots, x_N) = n + N$ 。函数序列

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, (x - x_1)_+^n, \ldots, (x - x_N)_+^n\}$$

构成 $S_n(x_1, \ldots, x_N)$ 的一组基底。

假定我们用 n 次样条函数在点 $x_1, \ldots, x_N$ 插值函数 f ，即寻找一 $s \in S_n(x_1, \ldots, x_N)$ 使得

$$s(x_j) = f(x_j), j = 1, \ldots, N.$$

因为 $\dim S_n(x_1, \ldots, x_N) > N$, 这个问题的解并不唯一. 为保证唯一性, 我们通常加一些附加条件. 一种方法就是引入自然样条函数的概念. 一个 $2n-1$ 次样条函数 $S \in S_{2n-1}(x_1, \ldots, x_N)$, 如果在区间 $(-\infty, x_1)$ 与 (x_N, ∞) 上都是 $n-1$ 次多项式, 则称之为 $2n-1$ 次自然样条函数。以 (1) 为结点的 $2n-1$ 次自然样条函数总体记为 $N_{2n-1}(x_1, \ldots, x_N)$ 。那么

定理 2 为使 $S \in N_{2n-1}(x_1, \ldots, x_N)$ 必须且只需存在次数为 $n-1$ 的多项式 p_{n-1} 和实数 $c_1, \ldots, c_N$ 使得

$$S(x) = p_{n-1}(x) + \sum_{j=1}^{N} c_j (x - x_j)_+^{2n-1},$$

此处 $c_1,\ldots,c_N$ 满足条件

$$\sum_{j=1}^{N} c_j x_j^k = 0, k = 0,\ldots,n-1.$$

由上述定理看出 $\dim N_{2n-1}(x_1,\ldots,x_N) = N$ 。那么，我们有如下插值存在唯一性定理：

定理 3 设 $1 \le n \le N$ ，则对任意给定的 $y_1,\ldots,y_N$ 存在唯一的自然样条函数 $S \in N_{2n-1}(x_1,\ldots,x_N)$ ，使得

$$S(x_j) = y_j, \qquad j = 1,\ldots,N.$$

在所有插值于 $(x_j,y_j), j = 1,\ldots,N$ ，自然样条函数具有最光滑特征。下面定理是 Holladay 在 1957 年给出的：

定理 4 设 $1 \le n \le N$ ，且

$$a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_N \le b$$

又设 $S \in N_{2n-1}(x_1,\ldots,x_N)$ 是满足插值条件

$$S(x_j) = y_j, \quad j = 1,\ldots,N$$

的自然样条函数，则对任何满足上述条件的函数 $f \in C^n[a,b]$:

$$f(x_j) = y_j, j = 1,\ldots,N$$

必有

$$\int_a^b (S^{(n)}(x))^2 dx \ \le \ \int_a^b (f^{(n)}(x))^2 dx$$

且等号成立当且仅当 $f \equiv S$ 。

2 B 样条函数

B 样条函数在理论和应用中均扮演重要角色。即使从纯粹数学角度看， B 样条函数也有其自身的魅力。 B 样条函数的定义有多种，我们将主要介绍几种。

2.1 截断幂插商

定义向后插分为

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-1), \Delta^n f(x) = \Delta^{n-1}\Delta f(x).$$

那么， m 阶 $(m-1$ 次)B 样条定义为：

$$B_m(x) := \frac{1}{(m-1)!}\Delta^m x_+^{m-1}.$$

根据上述定义，我们可将 B_m 表示如下：

$$B_m(x) = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(x-k)_+^{m-1}.$$

2.2 卷积观点

令

$$B_1(x) = 1, \quad 0 \le x < 1, \qquad B_1(x) = 0, x < 0, x \ge 1.$$

那么，我们可归纳定义

$$B_m = B_{m-1} * B_1,$$

即

$$B_m(x) = \int_0^1 B_{m-1}(x-t)dt.$$

通过该定义，我们可看到

$$\hat{B}_m(w) = (\frac{1-e^{-iw}}{iw})^m$$

2.3 B 样条函数性质

在这一节里，我们假设 B 样条函数按照卷积的方式定义：

B 样条函数满足如下性质：

1. 对每个测试函数 φ,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)B_m(x)dx = \int_{x\in[0,1)^m}\varphi(x_1+\cdots+x_m)dx_1\cdots dx_m.$$

2. 对每个函数 $g \in C^m$

$$\int_{-\infty}^{\infty}g^{(m)}(x)B_m(x)dx = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}g(k).$$

3.

$$B_m(x) = \frac{1}{(m-1)!}\Delta^m x_+^{m-1}.$$

4.

$$\mathrm{supp}B_m(x) = [0,m].$$

5.

$$B_m(x) > 0,\ 0 < x < m.$$

6.

$$\sum_k B_m(x-k) = 1.$$

7.

$$B_m'(x) = B_{m-1}(x) - B_{m-1}(x-1).$$

8.

$$B_m(x) = \frac{x}{m-1}B_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}B_{m-1}(x-1).$$

9. B_m 关于中心对称。