Padé 逼近

Taylor 级数是遍及许多物理和生物学中数学模型的实际计算基础。通常，我们可用 Taylor 级数对函数值进行近似。但是，这种功能是有一定限度的。我们考察函数

$$f(x) \ = \ \left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{1/2} \sim 1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+\frac{13}{16}x^3-\frac{141}{128}x^3-\cdots.$$

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，上述级数并不收敛。因此，我们不能用其计算 $f(\infty)=\sqrt{2}$. 如果我们做变量替换

$$x=2/(1-2w), \qquad w=x/(1+2x)$$

那么

$$f(x(w))=(1-w)^{-1/2}=1+1/2w+3/8w^2+5/16w^3+35/128w^4+\cdots$$

于 $w=1/2(x=\infty)$ 处收敛。我们可用来计算 $\sqrt{2}$ 的近似值。若我们将 $w=x/(1+2x)$ 带入上式，取前几个关于 w 的截断多项式，则事实上我们采用了下列的有理式逼近 f:

$$1,\frac{1+(5/2)x}{1+2x},\frac{1+(9/2)x+(43/8)x^2}{(1+2x)^2},\ldots.$$

下面我们考虑由 Taylor 展开式所定义的函数 f 的一种重要的分式逼近方法 -Padé 逼近方法。

设 f 由下述形式幂级数所定义：

$$f(x)\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j.$$

则 f 的 $[L/M]$ Padé 逼近为

$$[L/M]=P_L/Q_M$$

其中 P_L,Q_M 分别为次数不超过 L 和 M 的多项式，且按照下述方程来确定

$$f(x)-P_L(x)/Q_M(x)=O(x^{L+M+1}).$$

此外，我们要求 Q_M 满足标准化条件 $Q_M(0)=1$ ，我们也要求 P_L,Q_M 无公因子。

下述定理表明 Padé 逼近若存在，则唯一。

定理 1 (Frobenius-Padé) 对于任意形式幂级数 f ，若其 $[L/M]$*Padé* 逼近存在，则必唯一。

例子：计算

$$f(x) = e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

的 Padé 逼近表。

对于有理函数的 Padé 逼近，我们有

定理 2 若函数 f_0 具有形式

$$\frac{\sum_{t=0}^{l} c_t x^t}{1 + \sum_{u=1}^{m} e_u x^u}$$

必须且只需它的 *Padé* 逼近为

$$[L/M] = f_0(x)$$

只要 $L \geq l, M \geq m.$

对于 Padé 逼近的存在性问题， 1973 年 Baker 证明了如下结果：

定理 3 对给定任一形式幂级数，下面事实成立：

1. 对任意固定 M ，均存在 L_j 的一个无穷序列，使得 $[L_j/M]$ 存在；

2. 对任一固定 L ，均存在 M_j 的一个无穷序列，使得 $[L/M_j]$ 存在；

3. 对任一固定 J ，均存在一个无穷序列 M_j ，使得 $[M_j + J/M_j]$ 存在。

作业：试计算 $\sin(x)$ **的** $[3/3]$ **级** Padé **逼近，并与** $\sin x$ **的** 6 **阶** Taylor **展开相比较**。

注：本节内容节取自于王仁宏所著《数值逼近》。