平方逼近

1 定义

设 ρ 是一个在区间 $[a,b]$ 上 L 可积的非负函数，它至多只在一个测度为 0 的集合上可能等于 0 。我们称 ρ 为一个权函数。对于任意一个定义在区间 $[a,b]$ 上的可测函数 f ，如果 $\rho \cdot f$ 是 L 可积的，则说 f 属于 $L_\rho[a,b]$ 类，如果 $\rho \cdot f^2$ 是 L 可积的，则说 f 属于 $L^2_\rho[a,b]$ 类。 $L^2_\rho[a,b]$ 中的每一个函数 f ，其范数定义为

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx}.$$

那么， $\|f-g\|$ 给出两个函数 f,g 之间的距离。所谓平方逼近就是按照这种度量来衡量逼近程度。

2 直交函数系与广义 Fourier 级数

设 ρ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的权函数。如果函数 f 与 g 满足条件：

$$\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

则说 f 和 g 在 $[a,b]$ 上关于权函数 ρ 是直交的。如果函数系统

$$\omega_1, \omega_2, \ldots$$

中的每一对函数在区间 $[a,b]$ 上关于权函数 ρ 均直交，则称该系统为 $[a,b]$ 上关于权函数 ρ 的直交函数系。我们看几个例子：

例 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

是定义在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的直交函数系。

例 Legender 多项式

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(\frac{d}{dx})^n (x^2-1)^n, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

是区间 $[-1,1]$ 上的直交多项式。

例 Tchebyshev 多项式系

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad n=0,1,2,\ldots$$

是区间 $[-1,1]$ 上对权函数 $(1-x^2)^{-1/2}$ 的直交系。

例 考虑 Sturm-Liouville 微分方程边值问题:

$$y''+\lambda\rho(x)y=0,\ y(a)=y(b)=0,$$

此处， ρ 就是定义在 $[a,b]$ 上的连续函数， λ 为数值参数。凡不恒等于 0 的解均称为基本函数，而对应的 λ 成为特征值。对于每一个特征值，都只有一个基本函数。特征值可以由小到大排列起来，而对应的基本函数也可以排成一列，例如:

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots$$

$$y_1,y_2,y_3,\ldots.$$

可以证明，上列的基本函数系在闭区间 $[a,b]$ 上关于权函数 ρ 正交。

下面我们介绍广义 Fourier 展开的问题。设置

$$A_k=\int_a^b\rho(x)\omega_k^2(x)dx.$$

和

$$c_k=\frac{1}{A_k}\int_a^b\rho(x)\omega_k(x)f(x)dx,k=1,2,\ldots$$

从而有如下的广义 Fourier 级数:

$$f(x)\ \sim\ \sum_{k=1}^{\infty}c_k\omega_k(x)$$

定理 1 对于任意给定的正整数 n ，用线性组合式

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_k(x)$$

做成的函数对 f 进行平方逼近，为使偏差

$$\|F-f\|=(\int_a^b\rho(x)(F(x)-f(x))^2dx)^{1/2}$$

达到最小，函数 F 必须等于广义 *Fourier* 级数的部分和 $S_n(x):=\sum_{k=1}^{n}c_k\omega_k(x)$ 。而偏差最

小值等于

$$\|S_n - f\| = (\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - \sum_{k=1}^{n} A_k c_k^2)^{1/2}.$$

注意到 $\|S_n - f\| \geq 0$ ，因此，可有

$$\sum_{k=1}^{n} A_k c_k^2 \ \leq \ \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx.$$

令 $n \to \infty$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 \leq \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx,$$

这就是 Bessel 不等式。根据偏差的最小值表达式可知，上述 Bessel 不等式能改为 Parseval 等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 \ = \ \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx$$

的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n - f\| = 0.$$

那么，我们现在看另外一个问题，在什么条件下，给定的数列 $\{c_k\}$ 能够作为 L_ρ^2 中某一函数 f 的 Fourier 系数，并且由其生成的 Fourier 级数平均收敛于 f 呢？对这个问题的回答有如下定理：

定理 2 设 ω_k 在闭区间 $[a,b]$ 上关于权函数 ρ 作为直交系。如果数列 c_k 满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 < +\infty$$

则 $L_\rho^2[a,b]$ 中存在唯一的函数 f 使得 f 的 *Fourier* 系数恰好是 c_k 且 $\sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k$ 平均收敛于 f 。

若一个直角函数系 $\{\omega_k\}$ 对于 L_ρ^2 中的每一函数 Parseval 等式成立，则称它为封闭的直交函数系。若 $\{\omega_k\}$ 为封闭的直交函数系，而 f, g 为 L_ρ^2 中的任意两个函数，它们的 Fourier 级数分别为 $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ ，则下列广义 Parseval 等式成立

$$\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k \beta_k.$$

给一个直角系 $\{\omega_k\}$ ，如果 $L_\rho^2[a,b]$ 中再没有一个函数与一切 ω_k 直交，那么 $\{\omega_k\}$ 称为完备的直交系。

直交系的完备性与封闭性等价。

作为简单的总结，我们知道下面的概念都是彼此等价的：

1. $\{\omega_k\}$ 是完备直交系；

2. $\{\omega_k\}$ 是封闭直交系；

3. Parseval 等式对每个 $f \in L_\rho^2$ 成立；

4.L_ρ^2 中每个 f 的 Fourier 级数都平均收敛；

5. 只有处处取 0 值得函数才能同所有 ω_k 正交；

6. 当两个函数有相同 Fourier 级数时，它们必定几乎处处相等；

7. 对 L_ρ^2 中的每个 f 用 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ 的线性组合来作平方逼近时，偏差的最小值与 $1/n$ 同时趋于 0 。

8. 由 $\{\omega_k\}$ 中的函数一切线性组合构成的类是在 L_ρ^2 中稠密。

3 几种特殊的直交多项式

我们简要介绍三种最常用的直交多项式，它们是 Legender 多项式系 $\{p_n\}$ ， Laguerre 多项式系 $\{L_n\}$ 和 Hermite 多项式系 $\{H_n\}$ 。它们在数学物理问题及数值积分中均有重要意义。

1. Legender 多项式系

在区间 $[-1,1]$ 上对于权函数 $\rho = 1$ 构成的直交系的多项式 p_n 称为 Legendre 多项式系，其简单表达形式为

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(\frac{d}{dx})^n (x^2-1)^n.$$

$p_n(x)$ 实际上是下列 Legendre 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0$$

在正规点 $x=0$ 附近满足条件 $y(1)=1$ 的唯一确定的多项式解。 $p_n(x)$ 有如下的母函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) z^n, \quad |z| < 1.$$

2. Laguerre 多项式

以前我们所讨论的一切，都是假定基本区间 $[a,b]$ 是有限的。其实，权函数、 L_ρ^2 空间以及直交系等概念也完全可以推广到无限区间的情形。所谓的 Laguerre 多项式系 $\{L_n\}$ ，就是在

区间 $(0,+\infty)$ 上关于权函数 e^{-x} 所构成的直交系。它们可以表达为：

$$L_n(x)=e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^ne^{-x}).$$

只要将上式右端的导数算出，就知道 L_n 是 n 次多项式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}.$$

3. Hermite 多项式

所谓的 Hermite 多项式 $\{H_n\}$ 就是在区间 $(-\infty,\infty)$ 上关于权函数 e^{-x^2} 所构成的直交系。它可以通过如下的表达式来定义：

$$H_n(x)=e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(e^{-x^2}).$$