

Fourier 变换

1 从 Fourier 级数到 Fourier 变换

Fourier 级数处理了 2π 周期函数。那么对于周期比 2π 大的函数呢？对于非周期函数呢？这时候 Fourier 级数就应该推广为 Fourier 变换。

回顾 Fourier 级数定义：若 $f : R \rightarrow C$ 是 2π 周期函数，且 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ 可积。则所谓 $f(x)$ 的 Fourier 级数就是

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx},$$

此处，

$$f_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

如果 $f(x)$ 是平方可积的 4π 周期函数，就不能直接利用上述公式作 Fourier 级数展开。但是， $f(2x)$ 是个 2π 周期函数，因此，我们有

$$f(2x) = \frac{1}{2\pi} \sum_k f_k e^{ikx}, \quad f_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(2x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) e^{-ikx/2} dx.$$

因此，

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_k f_k e^{ikx/2}.$$

同理，如果 $f(x)$ 是在一个周期上平方可积的 $2n\pi$ 周期函数，则有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{n} \sum_k f_k e^{ikx/n} \right), \quad f_k = \int_{-n\pi}^{n\pi} f(x) e^{-ikx/n} dx.$$

如果我们可以找到函数 $\hat{f}(w)$ 使得 $\hat{f}(k/n) = f_k$ ，那么上式括号内就可以写成

$$\frac{1}{n} \sum_k \hat{f}(k/n) e^{ikx/n}.$$

注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_k \hat{f}(k/n) e^{ikx/n} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw. \quad (2)$$

由此, 只要 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 而且可以找到 \hat{f} 使得 (2) 成立, 就有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx} dw.$$

纯粹就形式而言, 类比 (1), 我们可有

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx, w \in \mathbb{R}.$$

\hat{f} 称为 f 的 Fourier 变换。

例子: 如果 $f(x) = e^{-\pi x^2}$, 那么 $\hat{f}(w) = e^{-\pi w^2}$.

2 性质

为符号描述方便, 我们也用 $\mathcal{F}[f(x)](w)$ 表示 Fourier 变换。那么下面的性质容易验证:

线性: $\mathcal{F}[cf(x) + g(x)](w) = c\mathcal{F}[f(x)](w) + \mathcal{F}[g(x)](w)$.

卷积: $\mathcal{F}[(f * g)(x)](w) = \hat{f}(w)\hat{g}(w)$.

缩放平移: $\mathcal{F}[f(x-t)](w) = e^{-itw}\hat{f}(w)$, $\mathcal{F}[f(ax)](w) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(w/a)$.

导函数: 如果有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\mathcal{F}(f')(w) = iw\hat{f}(w)$.

3 理论

现在, 我们面临的问题是: 什么样的条件可以保证 \hat{f} 存在, 再者, 什么样的条件下可还原 f .

3.1 L^1 理论

注意到

$$|\hat{f}(w)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-iwx}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

因此, 只要 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 则 $\hat{f}(w)$ 存在. 但是 $\hat{f}(w)$ 却未必 $\in L^1(\mathbb{R})$. 反例:

$$f(x) = e^{-x}, x \geq 0; \quad f(x) = 0, x < 0. \quad (3)$$

容易验证 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 但 $\hat{f}(w) = \frac{1-iw}{1+w^2} = \frac{1}{1+iw}$ 不属于 $L^1(\mathbb{R})$. 如果 $\hat{f}(w) \in L^1(\mathbb{R})$ 则 $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx} dw$ 可积分. 但积分却未必等于 f . L^1 的 Fourier 变换理论描述如下: 若 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 则 $\hat{f}(w)$ 存在且连续. 若 \hat{f} 也属于 $L^1(\mathbb{R})$, 则 $f(x)$ 在 x 连续, 且

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx} dw.$$

3.2 L^2 理论

但是, 我们在讨论 Fourier 级数得时候, 更多关心的是 L^2 函数. 注意到有些 $L^2(R)$ 函数不在 $L^1(R)$ 内. 同时也有些 $L^1(R)$ 的函数不在 $L^2(R)$ 内. 可见, $L^1(R), L^2(R)$ 不互相包含, 但也不互相排斥. 例如, (3) 中定义的函数 $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$, 而且 $\hat{f} \in L^2(R)$. 其实这是个普遍的现象, 只要 $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$, 则 \hat{f} 存在且属于 $L^2(R)$. L^2 的 Fourier 变换理论是说:

若 $f, g \in L^1(R) \cap L^2(R)$ 则 $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(R)$ 且 $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$, 其中 $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$.

4 Poisson 和

我们从 2π 周期的函数出发, 经过黎曼和的概念得到平方可积但非周期函数的 Fourier 变换. 现在反过来假如先有非周期性函数 $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$ 和它的 Fourier 变换 \hat{f} . 考虑如下函数级数

$$f_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x - 2k\pi).$$

若 $f_p(x)$ 存在, 亦即上列级数对任意 $x \in R$ 收敛, 则 $f_p(x + 2\pi) = f_p(x)$, 可见 $f_p(x)$ 是 2π 周期函数, 且容易验证其属于 $L^2_p(-\pi, \pi)$. 可对其进行 Fourier 级数展开, 有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x - 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad (4)$$

这就是 poisson 求和公式.

一个特例是:

$$\sum_k e^{-a(4k\pi)^2} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \sum_k e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$

这个公式在分析与数论中有许多非常重要的应用, 黎曼曾经用它导出 ξ 函数的显式表达公式.

如果 $f \in L^2(R)$ 但是 $\text{supp} f = [-\pi, \pi]$, 那么 f_p 必定存在. 而且当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时 $f_p(x) = f(x)$. 在这种情况下,

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_p(x) e^{-ikx} dx.$$

此时, poisson 求和公式回到了 Fourier 级数定义.

Poission 求和公式有几个常见的变形。例如：

$$\sum_k f(x - kT) = \frac{1}{T} \sum_k \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{T}\right) e^{\frac{i2k\pi x}{T}}.$$

代入 $x = 0, T = 1$ 后得到

$$\sum_k f(k) = \sum_k \hat{f}(2k\pi).$$

事实上，(4) 左右两边都是无穷求和公式，为保证 poission 公式严格成立，我们需要加一定的条件。一组充分条件是

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),$$

且

$$\hat{f}(\omega) = O\left(\frac{1}{(1 + |\omega|)^2}\right).$$

5 时频矛盾

我们能否构造一个函数 f ，使得 f 的非 0 函数值集中在局部时间上，其 Fourier 变换也局部在某个局部频率域上呢？假如存在一个常数 $A > 0$ 使得 $\text{supp} f \subset [-A, A]$ ，则称 f 为有界支集函数，若 \hat{f} 也为有界支集函数，我们称 f 为有界频宽。那么，我们的结论是：**如果 $f \neq 0$ 是有界支集函数，它就不可能是有界频宽。** 我们这里只看个特例：若 $f \neq 0, \text{supp} f \subset [-\pi, \pi]$ ，如果 $\text{supp} \hat{f} \subset [-\Omega, \Omega]$ ，则对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 只要 $|k| \geq \Omega$ 就有 $\hat{f}(k) = 0$ 。套用 poission 公式，我们有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

但是有限个正弦余弦波的和，不可能是有界支集。因此， f 不是有界频宽。

下面我们介绍如果 f 是有界支集函数，其在频率域上的表现。如所知， \hat{f} 是 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 上的一个函数。若用定义

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\zeta x} dx, \quad \zeta \in \mathbb{C}$$

则可将 \hat{f} 拓展到复函数。如果 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\text{supp} f \subset [-A, A]$ 。令 $\zeta = u + iv$ ，则 $e^{-i\zeta x} = |e^{vx - iux}| = |e^{vx}| |e^{-iux}| = |e^{vx}| \leq e^{|v||x|} \leq e^{|\zeta||x|}$ 所以

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{|\zeta||x|} dx \leq \left(\int_{-A}^A |f(x)| dx \right) e^{A|\zeta|}.$$

我们可以忽略一些细节，下个简单的结论：

$$\text{supp } f \subset [-A, A] \Rightarrow |\widehat{f}(\zeta)| \leq C e^{A|\zeta|}.$$

Paley-Wiener 定理说，其反向命题也是对的。即：

$$\exists A > 0, \text{supp } f \subset [-A, A] \Leftrightarrow \exists C > 0, \forall \zeta \in \mathbf{C}, |\widehat{f}(\zeta)| \leq C e^{A|\zeta|}.$$

6 Shannon 定理

上面我们讨论了有界支集函数 f 在频率域上的表现，现在看看有界频宽函数在时间域上的性质。假如存在某个固定的 $N \in \mathbf{N}$ 使得当 $|w| \geq N\pi$ 时， $\widehat{f}(w) = 0$ 。这表示 $f(x)$ 不含有无穷多高频分量。这就如同多项式函数没有无穷多高次项一样。可以想象这样的函数不太复杂。例如，对于三次多项式，我们可通过 4 个样本，获得该多项式表现形式。有限频宽函数也有类似特性：可从样本获得整个函数。这就是 Shannon 取样定理。与多项式不同，理论上我们需要无穷多个样本，但这些样本可以是离散的。再者，Shannon 使用函数 $\text{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ 来合成整个函数。

事实上，我们只要知道 $f(\frac{k}{N}), k \in \mathbf{Z}$ 便得知

$$f(x) = \sum_k f\left(\frac{k}{N}\right) \text{sinc}(N\pi x - k\pi).$$

我们首先推导上述公式：若 f, N 如前所述，则

$$\sum_k \widehat{f}(w - 2N\pi k)$$

是一个 $2N\pi$ 周期函数，且若 $w \in [-N\pi, N\pi]$ ，它就是 $\widehat{f}(w)$ 。套用 poisson 公式，我们有

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{2N\pi} \sum_k \mathcal{F}[\widehat{f}]\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikw/N},$$

此处， $w \in [-N\pi, N\pi]$ 。

注意到 $\mathcal{F}[\widehat{f}]\left(\frac{k}{N}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{-ikw/N} dw = 2\pi f(-k/N)$ 。因此，有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N\pi}^{N\pi} \widehat{f}(w) e^{ixw} dw \\ &= \frac{1}{2N\pi} \sum_k f(k/N) \int_{-N\pi}^{N\pi} e^{i(x-k/N)w} dw, \end{aligned}$$

上式中的积分等于 $2 \sin\left((x - \frac{k}{N})N\pi\right) / (x - \frac{k}{N})$ 。