Fourier 级数

1　概念

所谓三角多项式是以下形式的函数

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad N \in Z, a_, b_n, x \in R.$$

根据 Euler 公式， $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 。三角多项式可以写为如下形式

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, \quad c_n \in C.$$

定义 1.1 若 $f : R \to C$ 是 2π 周期函数，且 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ 可积。则所谓 f 的 *Fourier* 级数就是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x},$$

此处，

$$\hat{f}(n) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

我们称三角多项式

$$S_N(f)(x) \;:=\; \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x},$$

为 f Fourier 级数的 N 阶部分和。那么， Fourier 级数理论大致上是研究如下问题：

在什么意义下， $S_N(f)$ **随着** N **趋向于无穷收敛于** f ？

例子：令 $f(x) = x/2$ 这里 $-\pi \le x \le \pi$. 那么， $\hat{f}(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2in}$ 。因此， f 的 Fourier 级数是

$$f(x) \;\sim\; \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{2in} e^{inx} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

2　基底

如果 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $L^2(a,b)$ 上的一组正交函数集合（不一定是基底），令

$$V \;=\; \text{span}\{\varphi_n(x) : 1 \le n \le N\}$$

是一个有限维子空间。则 $f \in L^2(a,b)$ 在 V 上的投影是

$$Pf(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n \varphi_n(x),$$

其中， $f_n = \int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)dx$ 。那么， Pf 是 f 在 V 中的最佳逼近。

定理 1 若令

$$t(x) = \sum_{n=1}^{N} t_n \varphi_n(x),$$

则

$$\|f - Pf\|_{L^2(a,b)} \ \leq \ \|f - t\|_{L^2(a,b)}$$

而等式成立如果当且如果

$$f_n = t_n, \ n = 1, \dots, N.$$

若令 $N \to \infty$ (如果有这么多 ϕ_n) ，则得到所谓的 Bessel 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_a^b f(x)\overline{\phi}_n(x)dx \right|^2 \ \leq \ \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

那么，一个简单的推论是，如果 $\{\phi_n\}$ 是一组正交集合，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\overline{\phi}_n(x)dx \ = \ 0. \tag{1}$$

3 Parseval 定理

若 $\|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}$ ，且是一个以 2π 为周期的函数，则记作

$$f \in L_p^2(-\pi,\pi).$$

Parseval 定理基本上说，在三角级数的情况下， Bessel 不等式的等号成立.

定理 2 当 $f \in L_p^2(-\pi,\pi)$,

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N(f)\|_{L^2(-\pi,\pi)} = 0,$$

而且,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = \|f\|^2_{L^2(-\pi,\pi)},$$

此处， $f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$

这个定理说明当 $f \in L_p^2(-\pi,\pi)$ 时， $S_N(f)$ 在 L^2 的意义下收敛于 f.

4 Gibbs 现象

Parseval 定理说的是 L^2 意义下的平均收敛，这并不代表每点处三角级数均会逐点收敛，也就是

$$\lim_{N\to\infty} |f(x) - S_N(f)(x)| = 0.$$

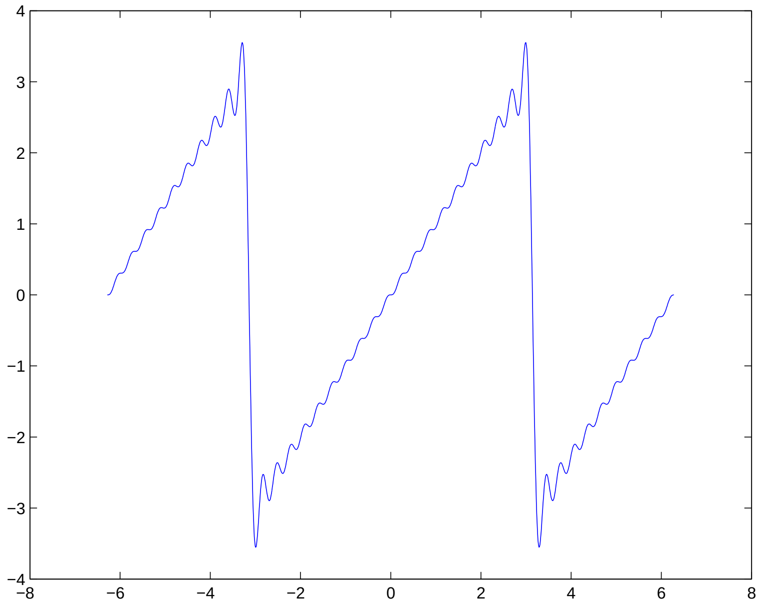
如果 $f(x)$ 在某点 x_0 不连续, 但是左右极限存在, 而且 $f(x)$ 在 x_0 两侧附近平滑. 则 $S_N(f)(x_0)$ 将收敛到 $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. 更有趣的是， $S_N(f)(x)$ 在 x_0 两侧都有射过的部分。这一部分的"宽度"随着 N 的增大而变窄，但高度却大约是个常数。这是一个非常著名的现象，称为 Gibbs 现象。

1898 年提出这个观察现象的是美国物理学家 Michelson, 他曾经因为测定光速以及证明以太不存在获得 1907 年的诺贝尔物理学奖。 1880 年左右，英国物理学家 Lord Kelvin 利用类比积分器发明了一种称作 Harmonic Analyzer 的计算器，其功能是可以依据输入的 $f(x)$ 图形计算其三角多项式系数，也就是 a_n, b_n, 当时用于海潮研究中。 1897 年， Michelson 设计了一些技术，使得这种计算器可以算出更高项的 Fourier 系数，起先是 20 项，后来是 80 项。他带着这个计算器参加 1900 年在巴黎举行的世界博览会得了首奖。

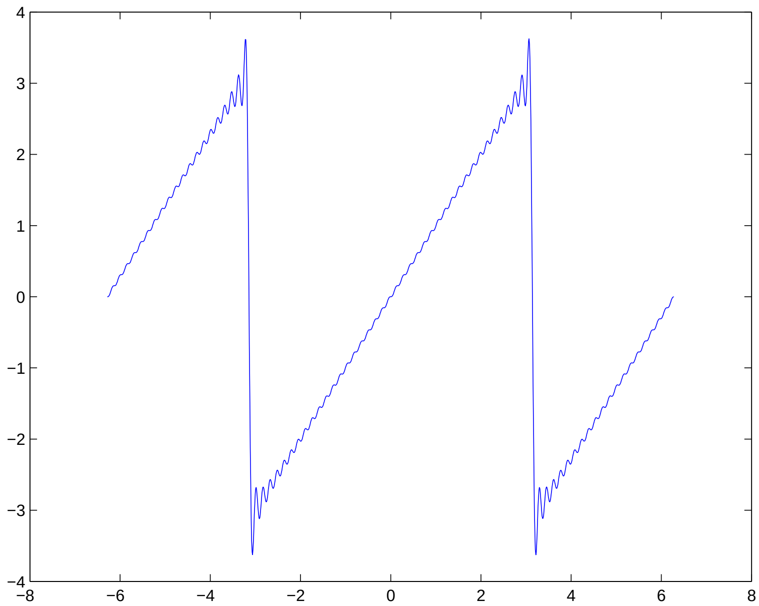
从这个计算器的输出， Michelson 观察到如下现象。令 $f(x) = x$, $x \in [-\pi,\pi)$, 并拓展为一个 2π 周期函数，显然 $f(x)$ 在 $(2k+1)\pi$ 不连续。我们只看 $-\pi,\pi$ 两点就可以了。根据

$$f(x) = 2(\sin x - \sin 2x/2 + \sin 3x/3 - \cdots) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

通过下图，我们可观察到，无论 $N = 20$ 还是 40 ， $S_N(f)(x)$ 都在不连续点处看起来射过一点点，而且过头的程度不会随着 N 的加大而改善.



$N=20$



$N=40$

1899 年， Gibbs 回应了 Michelson 的发现。他证明了，上述 $S_N(f)(x)$ 在 $(2k+1)\pi$ 附近最大值减去最小值趋近于 $4\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$. 上下超射的部分是 $2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx-\pi\approx 0.562281$.

为方便计算 Gibbs 现象中超射部分, 我们取一个比较方便的 2π 周期函数 $f(x)=\pi-x, x\in$

$[0, 2\pi)$. 这个 $f(x)$ 在 $x = 2k\pi$ 处不连续。 $f(x)$ 是奇函数，因此 $a_n = 0$. 容易算得

$$S_N(f)(x) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}.$$

令 $g_N(x) = S_N(f)(x) - f(x)$. 则 $g_N'(x) = 2\sum_{n=1}^{N} \cos nx + 1 = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2}$. 那么， $g_N(x)$ 在 0 的右边第一个相对极值出现于 $x_N = \frac{\pi}{N+1/2}$. $g_N(x)$ 的另一个表达式是

$$g_N(x) = g_N(0) + \int_0^x \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2} dx.$$

考察

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} g_N(x_N) &= \lim_{N\to\infty} \int_0^{x_N} \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2} dx - \pi \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sin(\frac{\theta}{2N+1})} \frac{1}{N+1/2} d\theta - \pi = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta - \pi.
\end{aligned}$$

从 Gibbs 现象可以看出，若 $f(x)$ 不连续，则 $S_N(f)(x)$ 不会逐点收敛。

5 收敛定理

定理 3 （逐点收敛定理）若 $f(x)$ 是一个连续 2π 周期函数。对某个 x, 若存在常数 $\delta > 0, M < \infty$, 使得对所有 $h \in (-\delta, \delta)$, $|f(x+h) - f(x)| \le M|h|$. 则

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x).$$

证明：设置 $D_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} e^{int}$. 当 $|t| \in (0, \pi]$, 令

$$g(t) = \frac{f(x-t) - f(t)}{\sin(t/2)}.$$

那么,

$$\begin{aligned}
& S_N(f)(x) - f(x) \\
=\ & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_N(t) dt \\
=\ & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(N + t/2) dt \\
=\ & \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t/2)\sin Nt dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(t/2)\cos Nt dt\right).
\end{aligned}$$

根据 (1)，上式中最后两部分均随着 N 趋向于无穷而趋向于 0.