# Box 样条

Box 样条函数是 B 样条函数在多元的成功推广。其于 1983 年由 de Boor 和 DeVore 提出。Box 样条继承了 B 样条函数优良的性质。今天， box 样条在逼近、数值解、小波、曲面造型等领域均有应用。而更令人惊讶的是， box 样条亦与许多纯粹数学分支，例如代数、离散几何、组合数学、代数几何等有着紧密关联。

我们假定我们考虑有 $s$ 个变量的函数，那么 box 样条定义在 $R^s$ 上。我们令 $A$ 是一个 $s\times n$ 的矩阵， $n\geq s$ 。我们将 $A_n$ 中的列元素标记为 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ ，那么

$$A_n=[d_1,d_2,\ldots,d_n].$$

为描述方便，我们也记

$$A_m=[d_1,d_2,\ldots,d_m].$$

此外，对于矩阵 $A$ ，我们称下面的多面体为关于 $A$ 的 **线和体** (zonotope):

$$Z(A)\ =\ \{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j d_j:0\leq\lambda_j<1\}.$$

我们称下述集合为与 $A$ 相关的锥：

$$\mathrm{cone}(A)\ =\ \{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j d_j:\lambda_j\geq 0\}.$$

下面我们介绍与矩阵 $A$ 相关的多元截断幂函数 $T(\cdot|A)$ 与 box 样条函数 $B(\cdot|A)$ 。不失一般性，我们假定 $\det(A_s)>0$ 。那么，与 $A_s$ 相关的多元截断幂为

$$T(x|A_s)=\det(A_s)^{-1},\ x\in\mathrm{cone}(A_s);\ T(x|A_s)=0,\ \text{otherwise}.$$

与 $A_s$ 相关的 box 样条为

$$B(x|A_s)=\det(A_s)^{-1},\ x\in Z(A_s);\ B(x|A_s)=0,\ \text{otherwise}.$$

那么，我们可通过递归的方式定义 $T(\cdot|A_m)$ 和 $B(\cdot|A_m),m>s$ ：

$$T(x|A_m)=\int_0^\infty T(x-td_m|A_{m-1})dt,$$

和

$$B(x|A_m) = \int_0^1 B(x - td_m|A_{m-1})dt.$$

**例子**：如果 $s=1,\ A=[1,1,\ldots,1]$ 。计算 $T(\cdot|A)$ 和 $B(\cdot|A)$ 。

我们下面介绍 $T(\cdot|A)$ 与 $B(\cdot|A)$ 的一些性质。

**引理 0.1** 对任意的紧支集无限光滑函数 $\varphi$ ，我们有

$$\int_{R^s} B(x|A_n)\varphi(x)dx = \int_{[0,1)^n} \varphi(A_n u)du$$
$$\int_{R^s} T(x|A_n)\varphi(x)dx = \int_{R_+^n} \varphi(A_n u)du.$$

对于函数 $f: R^s \to R$ ，如果 $f(\lambda \cdot x) = \lambda^{n-s}$ 那么我们称 $f$ 为次数为 $n-s$ 的齐次函数。

**定理 1** $T(\cdot|A_n)$ 为次数为 $n-s$ 的齐次函数。

对于向量 $d=(d_1,\ldots,d_s)^T$ ，我们定义方向导数为

$$\begin{aligned} D_d &:= d_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + d_s\frac{\partial}{\partial x_s}; \\ D_{A_0} &:= \prod_{d\in A_0} D_d. \end{aligned}$$

那么，我们有

$$D_{a_j}T(\cdot|A_n) \ = \ T(\cdot|A_n \setminus a_j), \quad \forall a_j \in A_n,$$

和

$$D_A T(\cdot|A_n) \ = \ T(\cdot|A_n \setminus A), \quad A \subset A_n.$$

那么，我们可以选择一个矩阵 $A$ ，使得 $\mathrm{span}(A_n \setminus A) \neq R^s$. 这意味着 $D_A T(\cdot|A_n)$ 仅在超平面 $\mathrm{span}(A_n \setminus A) \neq R^s$ 上非 0 。用类似的方法，我们可观察到，对任意的

$$A \in \mathcal{B}(A_n) := \{A : \mathrm{span}(A_n \setminus A) \neq R^s\}$$

$D_A T(\cdot|A_n)$ 几乎处处为 0 。这意味着 $T(\cdot|A_n)$ 为一分片多项式函数。

对于向量 $d=(d_1,\ldots,d_s)^T$ ，我们定义向后插分算子为

$$\nabla_d f(\cdot) \ := \ f(\cdot) - f(\cdot - d).$$

和

$$\nabla_{A_0} \;:=\; \prod_{d\in A_0} \nabla_d.$$

更多的，我们有

**定理 2**

$$B(\cdot|A) \;=\; \nabla_A T(\cdot|A).$$

**定理 3** *(1)* 函数 $B(\cdot|A_n)$ 在 $R^s$ 上非负。

*(2)* 如果 $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j d_j$, $0 < \lambda_j < 1$, 那么 $B(x|A_n) > 0$.

*(3)* $B(\cdot|A_n)$ 的支集是 $Z(A_n)$ 。

**定理 4** $B(\cdot|A_n)$ 的 *Fourier* 变换是

$$\widehat{B}(\omega|A_n) = \prod_{j=1}^{n} \exp(-\pi i\omega d_j)\frac{\sin(\pi\omega d_j)}{\pi\omega d_j}.$$

那么，应用 Poission 求和公式，我们有

**定理 5** 如果 $A_n$ 是非奇异的 $s\times n$ 的矩阵，且矩阵元素为整数。那么，

$$\sum_{v\in Z^s} B(x-v|A_n) \;=\; 1.$$