考试题目

时间： 2005 年 12 月 20 日至 2006 年 1 月 12 日.

1. 证明如下公式

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \int_D f^{(n)}(t_0 x_0 + t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) dt_1 dt_2 \cdots dt_n,$$

其中 $t_0 = 1 - (t_1 + \cdots + t_n)$, D 为如下单纯形：

$$D = \{(x_1, \cdots, x_n) | \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, \cdots, n\}.$$

此处 $f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 表示 n 阶差商。

2. 定义函数 $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$.

（ 1 ）写出该函数的 Fourier 变换。

（ 2 ）证明由 $\varphi(t)$ 可生成一个多尺度分析，也就是说 $\varphi(t)$ 可成为一个多尺度分析的尺度函数。

（ 3 ）写出与该多尺度分析相关的小波基。

3*. 对于均匀 B 样条函数，考察其最大值。

4*. 假设 $\varphi(x) \in L^2(R)$. 令 Λ 为 N 个不同点的并， $\Lambda = \cup_{k=1}^{N} \{(a_k, b_k)\}$. 令 $f_k(x) = e^{i2\pi b_k x} \varphi(x + a_k)$. 考察 $f_k(x), k = 1, \cdots, N$ 的线性无关性。

注： 3 ， 4 题目前文献中还没有答案。可对一些特殊的情况进行考虑。下面提供一些参考性的建议。对于第 3 题，最低的要求是编写程序，给定 B 样条的阶数，该程序可计算出最大值。事实上，通常人们认为对于 n 阶 B 样条函数， $\sqrt{1/n} \leq \max_x B(x) \leq \sqrt{2/n}$.

对于第 4 题，可对一些特殊的点集，或者特殊函数 f 证明其线性无关性。例如可证明对于 $b_k = 0, k = 1, \cdots, N$ 这一特殊情况， $f_k(x)$ 是线性无关的。总之，对你能证明的所有特殊情况，均可列出。