小波，2

目的：介绍多尺度分析的产生方式，与正交小波衰减性与光滑性之间的矛盾。

就像上讲所说的，我们可以通过多尺度分析的方法建造小波基底。多尺度分析的建立需要一系列空间 $\{V_j\}$ 及尺度函数 $\varphi(x)$. 那么，尺度函数 $\varphi(x)$ 又如何建立呢？

1 放松条件

多尺度分析里面，通常要求 $\varphi(\cdot - k)$ 彼此正交。这个条件可以放松为 $\varphi(\cdot - k)$ 构成一个 Riesz 基。事实上，通过 Riesz 基 $\varphi(\cdot - k)$ ，我们很容易得到一组正交基 $\varphi^{\#}(\cdot - k)$ 。

回忆 Riesz 基的定义， $\varphi(\cdot - k)$ 是一组 Riesz 基，如果和仅仅如果 $\forall (c_k) \in l^2$

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \| \sum_k c_k \varphi(\cdot - k) \|^2 \leq B \sum_k |c_k|^2.$$

如同我们以前所证明的，上式等价于

$$A \leq \sum_l |\widehat{\varphi}(w + 2\pi l)|^2 \leq B.$$

我们因此可定义

$$\widehat{\varphi}^{\#}(w) = (\sum_l |\widehat{\varphi}(w + 2\pi l)|^2)^{-1/2} \widehat{\varphi}(w).$$

容易证明， $\{\varphi^{\#}(\cdot - k)\}$ 构成一组正交基。因此，对于尺度函数 $\varphi(x)$ 可放松为 $\varphi(\cdot - k)$ 构成一个 Riesz 基。

2 构造尺度函数

多尺度分析由一系列空间和一个尺度函数 $\varphi(x)$ 组成。我们可从尺度函数 $\varphi(x)$ 出发构造多尺度分析。我们选择的 $\varphi(x)$ 需满足如下条件：

$$\varphi(x) = \sum_n c_n \varphi(2x - n), \{c_n\} \in l^2$$

和

$$\alpha \leq \sum_l |\widehat{\varphi}(w + 2\pi l)|^2 \leq \beta.$$

那么， V_j 可定义为由 $\varphi_{jk}(x) = 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x - k)$ 生成的空间。上述两个条件保证了 $\{\varphi_{jk}; k \in Z\}$ 是 V_j 的一组 Riesz 基，而且 V_j 满足嵌套的性质。为了证明由此产生的 V_j 确实可以构成一个多尺度分析，我们需要证明 $\cap_j V_j = \{0\}, \overline{\cup_j V_j} = L^2(R)$.

定理 1 如果 $\varphi \in L^2(R)$ 满足 $\alpha \leq \sum_l |\widehat{\varphi}(w + 2\pi l)|^2 \leq \beta$. 那么 $\cap_j V_j = \{0\}$.

证明： 1. 因为 $\{\varphi_{jk}\}$ 组成 V_j 的一组 Riesz 基，我们有 $\forall f \in V_j$,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_k |(f, \varphi_{jk})|^2 \leq B\|f\|^2.$$

2. 取 $f \in \cap_j V_j$. 那么对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在紧支集函数 $\widetilde{f}$ 使得 $\|f - \widetilde{f}\| \leq \varepsilon$. 令 $P_j : L^2(R) \to V_j$. 那么， $\|f - P_j\widetilde{f}\| = \|P_j(f - \widetilde{f})\| \leq \|f - \widetilde{f}\| \leq \varepsilon$. 因此， $\|f\| \leq \varepsilon + \|P_j\widetilde{f}\|, \forall j$.

3.$\|P_j\widetilde{f}\| \leq A^{-1/2}(\sum_k |(\widetilde{f}, \varphi_{jk})|^2)^{1/2}$ 能够证明，当 j 趋向于正无穷时，． $\|P_j\widetilde{f}\|$ 趋向于 0 。因此，对任意 $\varepsilon > 0, \|f\| \leq \varepsilon$.

定理 2 假设 $\varphi \in L^2(R)$ 满足

$$\alpha \leq \sum_l |\widehat{\varphi}(w + 2\pi l)|^2 \leq \beta.$$

假设 $\widehat{\varphi}(w)$ 有界，在 $w = 0$ 附近连续，且 $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. 那么， $\overline{\cup_j V_j} = L^2(R)$.

注 1 根据 $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ 的条件，我们可有 $\sum_n c_n = 2, \sum(-1)^n c_n = 0$.

根据以上的分析，我们可以选择 $\varphi(x)$ 通过如下方式：

(1) $\varphi, \widehat{\varphi}$ 有合理的衰减性。

(2). 满足双尺度方程与 Riesz 基的性质。

(3)$\int \varphi(x)dx = 0$.

如果需要，我们可用正交化技术

$$\varphi^{\#}(w) = \widehat{\varphi}(w)(\sum_l |\widehat{\varphi(w + 2\pi l)}|^2)^{-1/2}$$

最终，我们可选取 $\psi(x) = \sum_n (-1)^n h^{\#}_{-n+1}\varphi^{\#}(2x - n)$, 此处， $m_0^{\#}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n^{\#} e^{-inw}$.

3 例子

选取 $\varphi(x) = 1 - |x|, -1 \leq x \leq 1$, 其余为 0 。那么， $\varphi(x)$ 满足双尺度方程

$$\varphi(x) = 1/2\varphi(2x + 1) + \varphi(2x) + 1/2\varphi(2x - 1).$$

其 Fourier 变换为 $\widehat{\varphi}(w)=(\frac{\sin w/2}{w/2})^2$. 因为 $\sum_l|\widehat{\varphi}(w+2\pi l)|^2=2/3+1/3\cos w$.

因此 φ 满足双尺度方程, 且可作为一个 Riesz 基, 此外, $\varphi\in L^1, \int\varphi(x)dx\neq 0$. 因此, 相应的 V_j 可做成一个多尺度分析。我们对 $\varphi(x)$ 应用正交化技术, 可有 $\widehat{\varphi}^{\#}(w)=\sqrt{3}\frac{4\sin^2(w/2)}{w^2(1+2\cos^2(w/2))^{1/2}}$. 那么, $m_0^{\#}(w)=\cos^2(w/2)(\frac{1+2\cos^2 w/2}{1+2\cos^2 w})^{1/2}$. 因此, $\psi(x)$ 可最终确定。一般的, 通过 B 样条函数也可建立相应的小波基底。

4 正交小波基的规则性

定理 3 假设 $f,\widetilde{f}$ 是两个不恒为常数的函数, 且 $(f_{jk},\widetilde{f}_{j'k'})=\delta_{jj'}\delta_{kk'}$. 假定 $f\in C^m, |\widetilde{f}(x)|\leq C(1+|x|)^{-\alpha}, \alpha>m+1, f^{(l)}, l\leq m$ 有界。那么 $\int x^l\widetilde{f}(x)=0, l=0,\cdots,m$.

由此, 我们有

定理 4 如果 ψ_{jk} 组成正交小波基, 且 $\psi(x)\leq C(1+|x|)^{-m-1-\varepsilon}, \psi\in C^m$ $\psi^{(l)}$ 有界, 那么 $\int x^l\psi(x)dx=0, l=0,\cdots,m$.

定理 5 假设 ψ_{jk} 正交, 那么下面两种情况不可能同时出现

1. $\psi(x)$ 指数衰减

2.$\psi(x)\in C^\infty$ 且所有导数有界。