小波，1

目的：介绍小波的定义，多尺度分析，与通过多尺度分析建构小波基的方法。

1 定义

回忆 Fourier 级数的定义：若 $f : R \to C$ 是 2π 周期函数，且 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ 可积。则所谓 $f(x)$ 的 Fourier 级数就是

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx},$$

此处，

$$f_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

事实上， Fourier 级数是通过函数 $e(x) = e^{ix}$ 的缩放，即 $e_k(x) = e(kx)$ 来进行展开的。$|c_k|$ 反映了频率为 k 的波在信号 $f(x)$ 中的振幅。

从 Fourier 级数定义可看出，如果 $f(x)$ 只在某个有限的区域内发生变化，那么，其每一个 Fourier 级数的系数均需重新计算，这是 Fourier 级数的缺陷。也就是小波理论所需要克服的。

我们假设 $\Psi(x) \in L^2(R)$ and $\Psi_{kj}(x) = 2^{-k/2}\Psi(2^{-k}x - j), k, j \in Z$. $\{\Psi_{kj}(x)\}$ 形成了一个正交序列，如果

$$< \Psi_{kj}, \Psi_{ni} >= \delta_{kn}\delta_{ji},$$

此时，我们称 $\{\Psi_{ij}\}$ 形成了一个正交小波。对于函数 $f \in L^2(R)$ 其相应的小波级数为

$$f \sim \sum_k \sum_j c_{kj} \Psi_{kj},$$

此处， $c_{kj} = \int f(x)\Psi_{kj}(x)dx$.

我们看一个正交小波的例子。取 $\Psi(x) = 1, 0 \le x < 1/2, \Psi(x) = -1, 1/2 \le x < 1$, 其余为 0 。那么， Ψ_{mn} 形成一个正交小波基。

2 多尺度分析

定义：我们称满足下列条件的 $L^2(R)$ 中的一列子空间 $\{V_j\}$ 及一个函数 $\varphi(t)$ 为一个正交多尺度分析。

1. $V_j \subset V_{j-1}$.

2. $f \in V_j \Longleftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0$.

3. $\overline{\cup_j V_j} = L^2(R)$.

4.$\cap_j V_j = \{0\}$.

5.$\varphi(t) \in V_0$ 且 $\{\varphi(t-n)\}$ 形成了 V_0 的一组标准正交基。

我们称 $\varphi(t)$ 为该多尺度分析的尺度函数或者父函数。

根据条件 2 ， 5 ，我们可有 $\{\varphi_{jn} := 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x - n) : n \in Z\}$ 组成了 V_j 的一组正交基。

我们考察一个多尺度分析的例子。

我们选取 V_m 是一个分片常函数空间:

$$V_m = \{f \in L^2(R) : f\text{是常数在}[2^m n, 2^m(n+1)]\}.$$

我们可选取尺度函数 $\varphi(x) = 1, 0 \le x < 1$, 其余为 0 。显然， $\varphi \in V_0$.

注 1 如果刚开始选择的尺度函数 $\varphi_{0n}(x)$ 不正交,那么我们可以定义 $\mathcal{F}(\widehat{\varphi})(w) = \frac{\mathcal{F}(\varphi)(w)}{\sqrt{\sum_k |\mathcal{F}(\varphi)(w+2k\pi)|^2}}$. 则 $\widehat{\varphi}_{0n}$ 彼此正交，且 $\overline{span\{\varphi_{0n}\}} = \overline{span\{\widehat{\varphi}_{0n}\}}$

我们定义

$$c_{mn}(f) =< \varphi_{mn}, f >= 2^{-m/2}\int_{2^m n}^{2^m(n+1)} f(x)dx, P_m f = \sum_n c_{mn}(f)\varphi_{mn}.$$

因此，随着 m 的减小， $P_m(f)$ 可看作对 f 的越来越精细的逼近。

现在我们考察 $P_m f, P_{m+1} f$ 之间的差别。

容易看出

$$\varphi_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{m,2n} + \varphi_{m,2n+1});$$

$$c_{m+1,n}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{m,2n}(f) + c_{m,2n+1}(f)).$$

那么， $P_m f - P_{m+1} f = \frac{1}{2}\sum_n [c_{m,2n}(f) - c_{m,2n+1}(f)](\varphi_{m,2n} - \varphi_{m,2n+1})$.

一个有趣的观察是，若定义 $\Psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$, 那么 $Q_{m+1} f = P_m f - P_{m+1} f = \sum_n d_{m+1,n}(f)\Psi_{m+1,n}$, 此处 $d_{m+1,n}(f) =< \Psi_{m+1,n}, f >$.

我们定义 $W_{m+1} = P_m L^2 - P_{m+1} L^2$ 为 V_{m+1} 在 V_m 中的正交补。因为 $W_m \perp V_m, V_{m-1} = V_m \oplus W_m$, 所以 W_m 互相正交，而且 $L^2(R) = \oplus_m W_m$. 这个例子显示 Harr 小波基能从多尺度分析建立。

我们可以将上述分析抽象如下：

对于一个多尺度分析，即一列空间 V_m 与一个尺度函数 $\varphi(x)$. 定义 W_m 作为 V_m 在 V_{m-1} 中的正交补，

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m, W_m \perp V_m.$$

等价的，

$$W_m = Q_m L^2(R), Q_m := P_{m-1} - P_m.$$

那么，我们立即有

$$f \in W_m \Longleftrightarrow f(2^m \cdot) \in W_0, L^2(R) = \oplus_m W_m.$$

那么，通过多尺度分析构造小波基底的基本思想就是寻找一正交小波基使得 $\overline{span\{\Psi_{mn}\}} = W_m$. 为了构造 Ψ 我们先观察 φ 与 W_0 的性质。

1. 注意到 $\varphi \in V_0 \subset V_{-1}$, 我们有

$$\varphi(x) = \sum_n h_n \varphi_{-1,n}, \tag{1}$$

此处， $h_n = (\varphi, \varphi_{-1,m}), \sum |h_n|^2 = 1.$

(1) 可从写为

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_n \varphi(2x - n)$$

或者

$$\widehat{\varphi}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-inw/2} \widehat{\varphi}(w/2).$$

若令

$$m_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-inw},$$

则

$$\widehat{\varphi}(w) = m_0(w/2) \widehat{\varphi}(w/2).$$

2. 由 $\varphi(x-k)$ 的正交性, 我们有 $\sum_l |\widehat{\varphi}(w+2\pi l)| = 1$. 由此可得 $|m_0(w)|^2 + |m_0(w+\pi)|^2 = 1$.

3. 我们现在考虑 $f \in W_0$ 的特征。 $f \in W_0$ 等价于 $f \in V_{-1}, f \perp V_0$. 也就是

$$f = \sum_n f_n \varphi_{-1,n}, f_n =< f, \varphi_{-1,n} > .$$

这暗示

$$\widehat{f}(w) = m_f(w/2)\widehat{\varphi}(w/2),$$

此处

$$m_f(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n f_n e^{-inw}.$$

通过 $f \perp V_0$ 我们有 $f \perp \varphi_{0,k}$, 因此

$$\int \widehat{f}(w)\widehat{\varphi}(w)e^{ikw}dw = 0,$$

或者

$$\int_0^{2\pi} \sum_l \widehat{f}(w + 2\pi l)\widehat{\varphi}(w + 2\pi l)e^{ikw}dw = 0,$$

因此

$$\sum_l \widehat{f}(w + 2\pi l)\widehat{\varphi}(w + 2\pi l) = 0.$$

通过上式可得

$$m_f(w)m_0(w) + m_f(w + \pi)m_0(w + \pi) = 0.$$

因此，存在 2π 周期函数 $\lambda(w)$ 使得

$$m_f(w) = \lambda(w)m_0(w + \pi)$$

且

$$\lambda(w) + \lambda(w + \pi) = 0.$$

由最后一个方程可看出

$$\lambda(w) = e^{iw}v(2w)$$

此处， v 也是一个 2π 周期函数。

通过上面分析，可有

$$\widehat{f}(w) = e^{iw/2}m_0(w/2 + \pi)v(w)\widehat{\varphi}(w/2).$$

4. 通过上述分析，我们选取

$$\widehat{\Psi}(w) = e^{iw/2} m_0(w/2 + \pi)\widehat{\varphi}(w/2)$$

通过验证，可发现 Ψ_{0n} 构成 W_0 的一组基底。

因此，我们有

定理 1 如果一系列空间 $\{V_j\}$ 构成一个多尺度分析,那么存在一个相关的正交小波基 $\{\Psi_{j,k}\}$ 使得

$$P_{j-1} = P_j + \sum_k < \cdot, \Psi_{j,k} > \Psi_{j,k},$$

Ψ 可通过如下的方式得到

$$\widehat{\Psi}(w) = e^{iw/2} m_0(w/2 + \pi)\widehat{\varphi}(w/2),$$

或者等价的

$$\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^{n-1} h_{-n-1} \varphi(2x - n).$$