Box 样条

目的：介绍 Box 样条函数的定义，各种性质，及相应的拟插值算子。

1 定义

Box 样条函数是 B 样条函数在多元的成功推广。其于 1983 年由 de Boor 和 DeVore 提出。我们现在考虑的是 s 个变量的函数， box 样条定义于 R^s 上。令 A 为 $s \times n$ 矩阵，此处 $n \geq s$. A 的列标记为 $d_1, \cdots, d_n$ ，因此， A 可写为 $A = [d_1, d_2, \cdots, d_n]$. 注意，此处 A 中的列向量可重复。我们假定 $d_1, \cdots, d_s$ 线性无关，且对每一个满足 $1 \leq m \leq n$ 的 m ，我们有

$$A_m = [d_1, \cdots, d_m].$$

令 $Q_m = [0,1)^m$. 定义 $A_m(Q_m) = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i d_i : 0 \leq \lambda_i < 1\}$ 我们定义 $B(x|A_s) = \frac{1}{|det(A_s)|}, x \in A_s(Q_s)$, 其余为 0 。那么，与 A_m 相关的 Box 样条定义为

$$B(x|A_m) = \int_0^1 B(x - td_m|A_{m-1})dt.$$

例：取 $A = [1, 1, \cdots, 1]$ 则得到通常的 B 样条函数。

2 性质

定理 1 在上述符号定义下，下述结论成立

1. $B(\cdot|A)$ 在 R^s 上非负。

2. 若 $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i, 0 < \lambda_i < 1$, 则 $B(x|A) > 0$.

3. $B(\cdot|A)$ 的支集为 $A(Q_n)$ 的闭包。

4.

$$\int_{R^s} B(x|A)f(x)dx = \int_{Q_n} f(A_n y)dy$$

定理 2

$$\widehat{B}(\cdot|A_n)(w) = \prod_{j=1}^n \frac{exp(-id_j y) - 1}{id_j y}.$$

由定理 2 可看出， $B(\cdot|A_n)$ 与 A_n 中列元素的排列顺序无关。

通过 Possion 求和公式，下述引理成立：

引理 2.1 假设 f 是 R^s 上有界的，紧支集函数。假设 $\widehat{f}(2v\pi) = 0, \forall v \in Z^s \setminus \{0\}$. 那么，$\sum_{v\in Z^s}(x+v) = \widehat{f}(0)$.

根据上述引理，可证得

定理 3 $\sum_{v\in Z^s} B(x-v|A) = 1$.

我们介绍如下的拟插值算子：对 $f \in C^1(R^s), (L_h f)(x) = \sum_{v\in Z^s} f(vh)B(x/h - v|A)$. 那么，我们有

定理 4 存在仅依赖于 A 的常数 C, 使得

$$\|f - L_h f\| \le Ch \max_{|\alpha|=1} \|D^\alpha f\|_\infty.$$