B 样条函数

目的：介绍 B 样条函数的多种定义、性质。

1 样条函数

设给定一组结点

$$-\infty = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = \infty$$

又设分段函数 $S(x)$ 满足条件：

1. 在每个区间 $[x_j, x_{j+1}], j = 0, \cdots, N$ 上， $S(x)$ 是一个次数不超过 n 的实系数多项式。

2.$S(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上具有直到 $n-1$ 阶的导数。

则称 $S(x)$ 为 n 次样条函数。

我们考察该函数的结构。我们假设 $S(x)$ 于 $[-\infty, x_1]$ 上为 $p_n(x)$, 在 $[x_1, x_2]$ 上为 $q_n(x)$. 那么，根据 $S(x)$ 于 x_1 上 $n-1$ 阶连续的条件，我们有：存在一个常数 c_1 使得

$$q_n(x) = p_n(x) + c_1(x - x_1)^n.$$

因此， $S(x)$ 可统一的表达为

$$S(x) = p_n(x) + c_1(x - x_1)_+^n, x \le x_2.$$

继续采用这种分析方法， $S(x)$ 于整个实轴上可表达为

$$S(x) = p_n(x) + \sum_{j=1}^{N} c_j(x - x_j)_+^n.$$

而且，这种表达方式也是唯一的。

上述分析表明，函数序列

$$\{1, x, x^2, \cdots, x^n, (x - x_1)_+^n, \cdots, (x - x_N)_+^n\}$$

做成 n 次样条函数的一组基底。但是，若用该基底直接进行样条函数插值，形成的系数矩阵是不稳定的。因此，我们需要介绍另一个样条函数基底， B 样条基底。

2 B 样条函数定义

在这一节里面，我们将介绍 B 样条函数多种不同的观点和定义。

2.1 截断幂观点

定义向后差分为

$$(\Delta f)(x) := f(x) - f(x-1); (\Delta^n f)(x) := (\Delta^{n-1})\Delta f(x), n = 2, 3, \cdots.$$

那么， m 阶 B 样条函数可以定义为：

$$B_m(x) := \frac{1}{(m-1)!}\Delta^m x_+^{m-1}.$$

根据上述定义，可有 $suppB_m \subset [0, m]$. 此外，我们可以将 B_m 表示如下：

$$B_m(x) = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (x-k)_+^{m-1}.$$

此外，考虑函数在 0 点的 Taylor 展开，

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} x^j f^{(j)}(0)/j! + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty (x-t)_+^{m-1} f^{(m)}(t)dt.$$

两边取 m 阶差分，则有

$$\Delta^m f = \int_R B_m(t) f^{(m)}(t)dt.$$

若取 $f(x) = x^m$, 则有

$$\int_R B_m(t)dt = 1.$$

2.2 卷积观点

令

$$B_1(x) = 1, 0 \le x < 1, B_1(x) = 0, x < 0, x \ge 1.$$

可定义

$$B_m(x) = B_{m-1}(x) * B_1(x),$$

即

$$B_m(x) = B_{m-1}(x) * B_1(x) = \int_0^1 B_{m-1}(x-t)dt.$$

注意到 $\widehat{B}_1(w)=\frac{1-e^{-iw}}{iw}$. 那么， $\widehat{B}_m(w)=(\frac{1-e^{-iw}}{iw})^m$. 如果将 $B_m(x)$ 对称中心平移到原点，那么，便有 $\widehat{B}_m(w)=(\frac{\sin w/2}{w/2})^m$.

2.3 广义函数观点

对任意函数 $\varphi(x)\in\mathcal{D}(x)$, $B_m(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)B_m(x)dx=\int_{x\in[0,1)^m}\varphi(x_1+\cdots+x_m)dx_1\cdots dx_m.$$

容易看出，

$$\int_{x\in[0,1)^m}\varphi(x_1+\cdots+x_m)dx_1\cdots dx_m=\int_0^m\varphi(t)vol_{m-1}(A^{-1}t\cap[0,1)^m)/\sqrt{m}dt.$$

那么，我们有

$$B_m(x)=vol_{m-1}(A^{-1}x\cap[0,1)^m)/\sqrt{m},$$

此处， $A^{-1}x$ 是指满足 $x_1+\cdots+x_m=x$ 的 $(x_1,\cdots,x_m)$ 所组成的集合。这便是 B 样条函数的几何解释。

3 B 样条函数的性质

在这一节里，我们假设 B 样条函数按照卷积方式定义。

定理 1 *B 样条函数满足如下性质：*

1. 对每个函数 $\varphi(x)\in C$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)B_m(x)dx=\int_{x\in[0,1)^m}\varphi(x_1+\cdots+x_m)dx_1\cdots dx_m.$$

2. 对每个函数 $g(x)\in C^m$

$$\int_{-\infty}^{\infty}g^{(m)}(x)B_m(x)dx=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^kg(k).$$

3.

$$B_m(x)=\frac{1}{(m-1)!}\Delta^m x_+^{m-1}.$$

4.

$$suppB_m(x)=[0,m]$$

5.

$$B_m(x) > 0, 0 < x < m.$$

6.

$$\sum_k B_m(x-k) \equiv 1.$$

7.

$$B'_m(x) = B_{m-1}(x) - B_{m-1}(x-1).$$

8.

$$B_m(x) = \frac{x}{m-1}B_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}B_{m-1}(x-1)$$

9.$B_m(x)$ 关于中心对称。

我们考虑定义在 [-N,N] 上，以整点为剖分点的 m 次样条函数空间，将该空间标记为 $S_{m,N}$. 容易算出，该空间的维数为 $m+2N-1$. 那么，$\{B_m(x-k), k = -N-m+1, \cdots, N-1\}$ 线性无关，可做成该空间基底。

4 Riesz 基

定义 4.1 序列 $\{e_i\}$ 被称为 $L^2(R)$ 中的 *Riesz* 基，如果其张成在 $L^2(R)$ 中稠密，且存在 $A > 0, B > 0$, 使得下式对任意的序列 $\{a_i\}$ 成立：

$$A\sum_i |a_i|^2 \le \|\sum_i a_i e_i\|^2 \le B\sum_i |a_i|^2.$$

定理 2 对任一函数 $f \in L^2(R)$ 和常数 $0 < A \le B < \infty$, 下面两个叙述等价

1.$\{f(x-k); k \in Z\}$ 满足具有 *Riesz* 界 *A,B* 的条件，即：对任意 $\{c_k\} \in l^2$

$$A\|\{c_k\}\|_{l^2}^2 \le \|\sum_k c_k f(x-k)\|^2 \le B\|\{c_k\}\|_{l^2}^2$$

2.f 的 *Fourier* 变换 $\widehat{f}$ 满足

$$A \le \sum_k |\widehat{f}(x+2k\pi)|^2 \le B$$

令

$$S_m = \cup_{N=1}^{\infty} S_{m,N}.$$

假设 V_0^m 为 $S_m \cap L^2(R)$ 的 $L^2(R)$ 的闭包。

那么，我们有

$$\mathcal{B} = \{B_m(x-k)\}$$

可为 V_0^m 的一个 Riesz 基底。

注意到

$$|\widehat{B}_m(w)|^2 = |\frac{1-e^{-iw}}{iw}|^{2m}.$$

因此,

$$\sum_k |\widehat{B}_m(2x+2k\pi)|^2 = 2^{2m} \sum_k \frac{\sin^{2m}(x+k\pi)}{(2x+2k\pi)^{2m}}$$

注意到

$$cotx = \sum_k \frac{1}{x+k\pi}.$$

因此，我们有

$$\sum_k |\widehat{B}_m(x+2k\pi)|^2 = \frac{-\sin^{2m} x}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} cotx$$

由此可得

$$\sum_k |\widehat{B}_1(x+2k\pi)|^2 = 1, 1/3 \leq \sum_k |\widehat{B}_2(x+2k\pi)|^2 \leq 1.$$

5 双尺度方程

我们希望找到 $\{p_{m,k}\} \in l^2$ 使得

$$B_m(x) = \sum_k p_{m,k} B_m(2x-k).$$

通过 Fourier 变换可得到

$$\widehat{B}_m(w) = 1/2(\sum_k p_{m,k} e^{-ikw/2}) \widehat{B}_m(w/2).$$

注意到

$$\widehat{B}_m(w) = (\frac{1-e^{-iw}}{iw})^m.$$

由此可得到 $p_{m,k} = 2^{-m+1} C_m^k, 0 \leq k \leq m$ 其余为 0.