直交函数与广义 Fourier 级数

目的：介绍直交函数系及广义 Fourier 级数的各种性质。

1 空间 L_ρ^2

设 $\rho(x)$ 是一个在区间 $[a,b]$ 上的可积的非负函数，它至多在一个测度为 0 的集合上等于 0, 我们把 $\rho(x)$ 称为权函数。对于定义在 $[a,b]$ 上的可测函数 $f(x)$, 如果 $\rho(x)|f(x)|$ 可积, 则说 $f(x)$ 属于 $L_\rho[a,b]$ 类；如果 $\rho(x)|f(x)|^2$ 可积，则说 $f(x)$ 属于 $L_\rho^2[a,b]$ 类；可验证 $L_\rho^2 \subset L_\rho$ ， L_ρ^2 中两个函数的乘积属于 L_ρ. 我们可定义 L_ρ^2 中的每一个函数 $f(x)$ 的范数为

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x) f(x)^2 dx},$$

由此,

$$\|f-g\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x)(f(x)-g(x))^2 dx},$$

给出两个函数之间的距离。 L_ρ^2 按照上面的范数定义成为一个赋范空间，如果按照上面的距离方式定义距离，就成为一个距离空间。

2 直交函数与广义 Fourier 级数

设 $\rho(x)$ 是定义在 [a,b] 上的权函数，如果 $f(x), g(x)$ 满足条件：

$$\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0,$$

则说函数 f, g 在 [a,b] 上关于权函数 $\rho(x)$ 直交。如果函数系统

$$w_1(x), \cdots, w_k(x), \cdots$$

每一对函数均关于权函数 $\rho(x)$ 直交，则称该系统为 [a,b] 上关于权函数 $\rho(x)$ 的直交函数系。如果 $\rho(x) \equiv 1$ 则我们不提权函数。

例 考虑 Sturm-Liouville 微分方程边值问题： $y'' + \lambda y = 0, y(a) = y(b) = 0$, 此处， $\rho(x)$ 就是定义在 $[a,b]$ 上的连续函数， λ 为数值参数。凡不恒等于 0 的解 $y(x)$ 均称为基本函数,

对应的 λ 而成为特征值。对于每一个特征值，都有一个基本函数。特征值按照从大到小排列，因而对应的基本函数也排成一列，例如

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$$

$$y_1(x), y_2(x), \cdots .$$

可以证明，上列的基本函数系在闭区间 $[a, b]$ 上关于权 $\rho(x)$ 直交。

下面我们介绍广义 Fourier 级数展开问题。设 $\{w_k(x)\}$ 在区间 [a,b] 上关于 $\rho(x)$ 做成直交函数系，其中每一个 $w_k(x)$ 均不几乎处处等于 0 ，且均在空间 L_ρ^2 中，因而

$$A_k = \int_a^b \rho(x) w_k^2(x) dx$$

均为有限正数。特别，如果 $A_k = 1$, 则称 $\{w_k(x)\}$ 为标准直交系。若 $f(x) \in L_\rho^2$ ，称下面常数

$$c_k = \frac{1}{A_k} \int_a^b \rho(x) w_k(x) f(x) dx$$

为 $f(x)$ 的广义 Fourier 系数，从而有如下的广义 Fourier 级数：

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(x).$$

这个级数的部分和用来圆满的解决了一般形式的最小二乘问题。

定理 1 对于任意给定的正整数 n, 用线性组合式

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k w_k(x)$$

做成的函数对 $f(x)$ 进行平方逼近时，为使偏差

$$\|F - f\| = (\int_a^b \rho(x)(F(x) - f(x))^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

达到最小，函数 $F(x)$ 必须等于广义 *Fourier* 级数的部分和 $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} c_k w_k(x)$. 而偏差的最小值等于

$$\|S_n(x) - f(x)\| = (\int_a^b \rho(x)(f(x))^2 dx - \sum_{k=1}^{n} A_k c_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

注意到 $\|S_n - f\| \geq 0$, 因此，可有

$$\sum_{k=1}^{n} A_k c_k^2 \leq \int_a^b \rho(x)(f(x))^2 dx.$$

令 $n \to \infty$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 \leq \int_a^b \rho(x)(f(x))^2 dx,$$

我们通常称这个公式为 Bessel 不等式。

根据偏差的最小值表达式可知，上述 Bessel 不等式能改为 Parseval 等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx$$

的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(x) - f(x)\| = 0.$$

那么，我们现在看另外一个问题，在什么条件下，给定的数列 $\{c_k\}$ 能够作为 L_ρ^2 中某一函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数，并且有其形成的 Fourier 级数平均收敛于 $f(x)$ 呢？对这个问题的回答有如下定理：

定理 2 设 $w_k(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 作成直交系。如果数列 c_k 满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 < +\infty,$$

其中，$A_k = \int_a^b \rho w_k^2 dx$ 则 L_ρ^2 中存在唯一的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)$ 的 *Fourier* 系数恰好是 c_k，且 $\sum_{k=1}^n c_k w_k(x)$ 平均收敛于 $f(x)$.

若一个直交函数系 $\{w_k\}$ 对于 L_ρ^2 中的每一函数 Parseval 等式都成立，则称它为封闭的直交函数系。

若 $\{w_k\}$ 为封闭的直交函数系，而 $f(x), g(x)$ 为 L_ρ^2 中的任意两个函数，它们的 Fourier 级数分别为 $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$，则下列广义 Parseval 等式成立

$$\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k \beta_k.$$

给一个直交系 $\{w_k\}$，如果 L_ρ^2 中再没有一个函数与一切 w_k 直交，那么 $\{w_k\}$ 称为完备的直交系。

直交系的完备性与封闭性等价。

定理 3 $\{w_k\}$ 是一个完备的直交系的充要条件是：它是一个封闭的直交系。

下列的概念是互相等价的：

1. $\{w_k\}$ 是完备直交系;

2. $\{w_k\}$ 是封闭直交系;

3. Parseval 等式对每个 $f \in L_\rho^2$ 成立;

4. L_ρ^2 中的每个 f 的 Fourier 级数都平均收敛;

5. 只有几乎处处取 0 值的函数才能同一切 w_k 直交;

6. 当两个函数有相同的 Fourier 级数的时候它们必定几乎处处相等;

7. 对 L_ρ^2 中的每个 f 用 $w_1, \cdots, w_n$ 的线性组合来做平方逼近时，偏差的最小值与 $1/n$ 同时趋于 0 ;

8. 由 $\{w_k\}$ 中的函数的一切线性组合构成的类是在 L_ρ^2 中稠密的。