线性插值算子与多项式插值

目的：介绍线性插值算子概念， Lagrange **插值公式及最优结点选取的公开问题。介绍多元多项式插值。**

1 线性插值问题

区域 X 中，给定 n 个不同的点，$\mathcal{N} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 这些点称之为结点，$\mathcal{N}$ 称之为结点集。对每一结点 x_i 均有一值 λ_i 与之对应。插值问题就是寻找一函数 $F : X \to R$, 使得 $F(x_i) = \lambda_i, 1 \leq i \leq n$. 我们称 F 插值数据点 $\{(x_i, \lambda_i)\}$. 如果 F 从一个 n 维的函数向量空间中选择，那么就称为线性插值问题。我们假定 U 是一个向量空间，其基底为 $\{u_1, \cdots, u_n\}$, 那么我们要找的函数需要有这样的形式

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x_i)$$

插值条件就是

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x_i).$$

我们能将上述方程组写成形如 $Ac = y$ 的形式。为了对任意的 λ_i 插值问题均有解，我们要求矩阵 A 非奇异。

定理 1 在给定的结点 $x_1, \cdots, x_n$ 上，n 维线性函数空间 U 能插值任意值的充要条件是零数据仅仅能被 U 中的零元素插值。

2 Lagrange 插值公式

若取 $X = R, u_j = x^{j-1}, j = 1, \cdots, n$. 那么插值矩阵 A 是 Vandermonde 矩阵，其行列式为 $\prod_{j>i}(x_j - x_i)$, 显然非 0，因此该插值问题的解存在且唯一。但若求得插值函数，需要求解一线性方程组。明显的，如果我们选择不同的基底，插值矩阵 A 也不相同。因此，一个理想的选择方法是使得矩阵 A 成为一单位矩阵。就是选择基底 l_j 使得 $u_j(x_i) = \delta_{ij}$. 因此我们可以选择

$l_j(x) = \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}, 1 \leq j \leq n$. 因此，相应的插值公式可以写为

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j l_j(x).$$

这一公式被称为 Lagrange 插值公式. 记 $w(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$, 则 $l_j(x)$ 又可表示为更为简洁的形式 $l_j(x) = \frac{w(x)}{(x-x_j)w'(x_j)}$.

现在我们考虑插值余项问题，假设 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 $x_1, \cdots, x_n$ 处关于 $f(x)$ 的插值多项式，那么我们希望考虑 $f(x)$ 与 $p_n(x)$ 的偏差，即 $E(f;x) = f(x) - p_n(x)$.

定理 2 若 $f(x)$ 于包含着插值结点 $x_1, \cdots, x_n$ 的区间 $[a,b]$ 上 n 次可微，则对任意 $x \in [a,b]$, 有与 x 相关的 ξ 存在， $a < \xi < b$, 使得

$$E(f;x) = f(x) - p_n(x) = \frac{w(x)}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

其中， $w(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

下面我们从算子角度考虑 Lagrange 插值的一些性质。我们假定结点 $x_1, \cdots, x_n$ 总有 $-1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq 1$. 定义 $l_j(x) = \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}, 1 \leq j \leq n, Lf = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) l_j$. L 可以看作从 $C[-1,1] \to P_{n-1}$ 的算子，其范数 $\|L\|$ 定义为 $sup\{\|Lf\| : \|f\| \leq 1\}$.

Erdos,Brutman 得到了如下结果

定理 3 *Lagrange* 算子 L 有如下性质:

$$\|L\| > \frac{2}{\pi} logn + 0.5212$$

那么如何选取插值结点才能使 $\|L\|$ 达到最小呢？就是说，什么样的插值结点最优？受上面的偏差分析启示，我们希望选取结点使得 $\max_{-1\leq x\leq 1} |w(x)|$ 达到最小。即选取结点为最小 0 偏差多项式的零点应该比较好。最小 0 偏差多项式为 Chebysheve 多项式 $T_n(x) = cos(nacos(x))$, 其零点为 $x_j = cos(((2j-1)/2n)\pi)$. 这些结点称为 Chebysheve 结点。那么，我们有

定理 4 假设 L 是在 *Chebysheve* 结点上的 *Lagrange* 插值算子，那么

$$0.9625 < \|L\| - 2/\pi logn < 1.$$

虽然在这些节点上 $\|L\|$ 的增长速度达到了最优阶 $2/\pi logn$, 但有反例表明，在这些节点上 $\|L\|$ 不是最优的。那么，什么样的结点才是最优的呢？为此，我们引入 Lebesgue 函数

$$\Lambda(x) = \sum_{j=1}^{n} |l_j(x)|.$$

注意到 $\sum_{j=1}^{n} l_j(x) = 1, \Lambda(x) \geq 1$ 和 $\Lambda(x_i) = 1$. 那么， $\Lambda(x)$ 在每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 内有一极大。那么有

定理 5 令 x_i 是 *Chebysheve* 结点,和令 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 Λ 在区间 $[-1, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_n, 1]$ 上的局部极大。那么

$$max\lambda_i - min\lambda_i < 1/2.$$

现在，我们假设 σ_n 表示最小的 $\|L\|$. 为刻画取 σ_n 的结点， 1932 年， Bernstein 提出如下猜想：如果 -1 ， 1 也是插值结点中的一部分，那么 $\|L\|$ 达到最小如果和仅仅如果所有的 λ_i 相等。直到 44 年后， 1976 年这一猜想才获得证明。 1978 年，人们进一步证明

$$\min_i \lambda_i \leq \sigma_n \leq \max_i \lambda_i.$$

另外一种结点选取方式为扩展 Chebysheve 结点,就是选取结点 $x_j = \alpha \cos((2j-1)\pi/(2n))$,$\alpha$ 作适当的选择以至于 $x_n = -1, x_1 = 1$. 对这种结点， Brutman 证明，在这种结点选取下

$$\|L\| - \sigma_n < 0.201$$

因此，这种结点是非常接近最优结点了。

在这一领域，下面的问题仍然是公开的：

1. 是否存在一个简单的函数 f_n 使得最优结点是 f_n 的根？

2. 能否给出如下的形式

$$\sigma_n = \frac{2}{\pi} logn + c + \varepsilon_n,$$

其中， $\varepsilon_n \to 0$.

3 Newton 插值公式

我们可以选取另外一组基底，使得插值矩阵成为单位下三角矩阵，基底可为

$$u_1(x) = 1; u_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; u_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \cdots, u_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})}.$$

插值多项式可以写为

$$p_n(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + \cdots + f(x_1, \cdots, x_n)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

这一公式称为 Newton 型插值公式，其系数通过如下方式定义：

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}, i \neq j,$$

称为 $f(x)$ 的一阶差商。一阶差商的一阶差商

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k},$$

称为 $f(x)$ 的 2 阶差商。一般说来，我们称 $n-1$ 阶差商的一阶差商为 n 阶差商

$$f(x_n, \cdots, x_1) = \frac{f(x_n, \cdots, x_2) - f(x_{n-1}, \cdots, x_1)}{x_n - x_1}.$$

差商的性质：

1. 差商与结点的排列次序无关。

2. 若 $f(x)$ 在 [a,b] 上存在 $n-1$ 阶导数，且结点 $x_1, \cdots, x_n \in [a, b]$, 那么存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$f[x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

4 多元多项式插值

下面的 Haar 定理指出，在高维空间，插值的唯一可解性通常保证不了。

定理 6 设 S 是欧式空间 $R^n, n \geq 2$ 中包含一个内点 p 的点集。设 $u_1, \cdots, u_n, n > 1$ 定义在 S 上，且其中每个函数在 p 一个邻域内连续，则这个函数组在 S 上不唯一可解。

根据上述定理，在构造多元多项式插值的时候，插值结点组的选择非常重要。我们先引入一些概念。

设 $p_1(x, y), \cdots, p_n(x, y)$ 是一组线性无关的实系数多项式，令 $P = span\{p_1, \cdots, p_n\}$. D 是 R^2 上的有界闭区域， $f \in C(D), q_1, \cdots, q_n$ 是 D 中互异点，二元多项式插值问题就是寻找 $p \in P$, 使得下述插值条件满足

$$p(q_i) = f(q_i), i = 1, \cdots, n,$$

这样的多项式 $p(x, y)$ 称为 $f(x, y)$ 在 P 中的插值多项式， $q_1, \cdots, q_n$ 称为插值结点。若对任意给定的插值函数 $f(x, y)$, 上述插值问题的解存在唯一，就说插值结点是空间 P 的适定结点组。设 $p(x, y)$ 是 P 中的一个非 0 多项式， P 中的代数曲线 $p(x, y) = 0$ 由下述点集定义：

$$\{(x, y) | p(x, y) = 0, p \in P\}.$$

那么我们可对插值适定结点组作如下刻画

定理 7 点组 $q_1, \cdots, q_n$ 是 P 的适定结点组，如果和仅仅如果该点组不在 P 中的任意一条代数曲线上。

那么如何选取这样的适定结点组呢？我们先看代数几何中的开卷定理， Bezout 定理。

定理 8 设 $p_1(x,y), p_2(x,y)$ 分别为次数为 m, n 的多项式，若其公共零点多于 mn ，则 $p_1(x,y), p_2(x,y)$ 必有公因子存在。

由上述定理，我们可证得

定理 9 若 $q_1, \cdots, q_k$ 是 P_n 的适定结点组，且它的每个点都不在某条 $l, l = 1, or 2$ 次不可约代数曲线 $q(x,y) = 0$ 上，则将在该曲线上任取的 $(n+3)l - 1$ 个不同点与 $q_1, \cdots, q_k$ 放在一起，必定构成 P_{n+l} 的适定结点组。

由此，我们可通过添加直线法构造适定结点组。