Fourier 变换

目的：介绍 Fourier 变换的基本知识。

1 从 Fourier 级数到 Fourier 变换

Fourier 级数处理了 2π 周期函数。那么对于周期比 2π 大的函数呢？对于非周期函数呢？这时候 Fourier 级数就应该推广为 Fourier 变换。

回顾 Fourier 级数定义：若 $f: R \to C$ 是 2π 周期函数，且 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ 可积。则所谓 $f(x)$ 的 Fourier 级数就是

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx},$$

此处，

$$f_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \tag{1}$$

如果 $f(x)$ 是平方可积的 4π 周期函数，就不能直接利用上述公式作 Fourier 级数展开。但是， $f(2x)$ 是个 2π 周期函数，因此，我们有

$$f(2x) = \frac{1}{2\pi} \sum_k c_k e^{ikx}, c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(2x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) e^{-ikx/2} dx.$$

因此，

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum c_k e^{ikx/2}.$$

同理，如果 $f(x)$ 是平方可积的 $2n\pi$ 周期函数，则有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} (\frac{1}{n} \sum_k f_k e^{ikx/n}), f_k = \int_{-n\pi}^{n\pi} f(x) e^{-ikx/n} dx.$$

如果我们可以找到函数 $\widehat{f}(w)$ 使得 $\widehat{f}(k/n) = f_k$, 那么上式括号内就可以写成

$$\frac{1}{n} \sum_k \widehat{f}(k/n) e^{ikx/n}.$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_k \widehat{f}(k/n) e^{ikx/n} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwx} dw \tag{2}$$

由此，只要 $f \in L^2(R)$, 而且可以找到 $\widehat{f}(w)$ 使得 (2) 成立，就有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwx} dw.$$

纯粹就形式而言，类比 (1), 我们可有

$$\widehat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx, w \in R$$

$\widehat{f}(w)$ 称为 $f(x)$ 的 Fourier 变换。

例子：令 $a > 0$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{-w^2}{4a}}$$

2 性质

为符号描述方便，我们也用 $\mathcal{F}[f(x)](w)$ 表示 Fourier 变换。那么下面的性质容易验证：

线性：$\mathcal{F}[cf(x) + g(x)](w) = c\mathcal{F}[f(x)](w) + \mathcal{F}[g(x)](w)$.

卷积：$\mathcal{F}[(f * g)(x)](w) = \widehat{f}(w)\widehat{g}(w)$.

缩放平移：$\mathcal{F}[f(x-t)](w) = e^{-itw}\widehat{f}(w), \mathcal{F}[f(ax)](w) = \frac{1}{a}\widehat{f}(w/a)$.

导函数：如果有 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \mathcal{F}(f'(x))(w) = iw\widehat{f}(w)$.

3 理论

现在，我们面临的问题是：什么样的条件可以保证 $\widehat{f}(w)$ 存在，再者，什么样的条件下可还原 $f(x)$.

3.1 L^1 理论

注意到

$$|\widehat{f}(w)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-iwx}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

因此，只要 $f(x) \in L^1(R)$, 则 $\widehat{f}(w)$ 存在. 但是 $\widehat{f}(w)$ 却未必 $\in L^1(R)$. 反例：

$$f(x) = e^{-x}, x \ge 0, f(x) = 0, x < 0.$$

容易验证 $f(x) \in L^1(R)$, 但 $\widehat{f}(w) = \frac{1-iw}{1+w^2} = \frac{1}{1+iw}$.

也可验证 $\widehat{f}(w) \notin L^1(R)$. 如果 $\widehat{f}(w) \in L^1(R)$ 则 $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w)e^{iwx}dw$ 可积分。但积分却未必等于 $f(x)$. L^1 的 Fourier 变换理论描述如下： **若 $f(x) \in L^1(R)$ 则 $\widehat{f}(w)$ 存在且连续。若 $\widehat{f}(w)$ 也 $\in L^1(R)$, 则 $f(x)$ 在 x 连续，且 $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w)e^{iwx}dw$.**

3.2 L^2 理论

但是，我们在讨论 Fourier 级数得时候，更多关心的是 L^2 函数。注意到有些 $L^2(R)$ 函数不在 $L^1(R)$ 内。同时也有些 $L^1(R)$ 的函数不在 $L^2(R)$ 内。可见， $L^1(R), L^2(R)$ 不互相包含，但也不互相排斥。例如，函数 $f(x) = e^{-x} \in L^1(R) \cap L^2(R)$, 而且 $\widehat{f}(w) \in L^2(R)$.

其实这是个普遍的现象： **若 $f(x), g(x) \in L^1(R) \cap L^2(R)$ 则 $\widehat{f}(w), \widehat{g}(w) \in L^2(R)$ 且 $< f(x), g(x) >= \frac{1}{2\pi} < \widehat{f}(w), \widehat{g}(w) >$, 其中 $< f(x), g(x) >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$.**

4 Poisson 和

我们从 2π 周期的函数出发，经过黎曼和的概念得到平方可积但非周期函数的 Fourier 变换。现在反过来假如先有非周期性函数 $f(x) \in L^1(R) \cap L^2(R)$ 和它的 Fourier 变换 $\widehat{f}(w)$. 考虑如下函数级数

$$f_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x - 2k\pi).$$

若 $f_p(x)$ 存在，亦即上列级数对任意 $x \in R$ 收敛，则 $f_p(x + 2\pi) = f_p(x)$, 可见 $f_p(x)$ 是 2π 周期函数。可对其进行 Fourier 级数展开，有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x - 2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx},$$

这就是 poisson 求和公式。

一个特例是：

$$\sum_k e^{-a(2k\pi)^2} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\sum_k e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$

这个公式在分析与数论中有许多非常重要的应用，黎曼曾经用它导出 ξ 函数的显式表达公式。

如果 $f(x) \in L^2(R)$ 但是 $suppf(x) = [-\pi, \pi]$, 那么 $f_p(x)$ 必定存在。而且当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时 $f_p(x) = f(x)$. 在这种情况下，

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_p(x)e^{-ikx}dx.$$

此时， poission 求和公式回到了 Fourier 级数定义。

Poission 求和公式成立的条件：

定理 1 令 $f \in L^1(R)$ 满足下述两个条件：

1. 级数 $\sum_k f(x+2k\pi)$ 处处收敛于某个连续函数。

2.Fourier 级数 $\sum_k \widehat{f}(k)e^{ikx}$ 处处收敛。那么 *poission* 求和公式

$$\sum_k f(x+2k\pi) = \sum_k \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

成立。

Poission 求和公式有几个常见的变形。例如：

$$\sum_k f(x-kT) = \frac{1}{T}\sum_k \widehat{f}(\frac{2k\pi}{T})e^{x\frac{i2k\pi}{T}}$$

代入 $x=0, T=1$ 后得到

$$\sum_k f(k) = \sum_k \widehat{f}(2k\pi).$$

5 时频矛盾

我们能否构造一个函数 f，使得 f 的非 0 函数值集中在局部时间上，其 Fourier 变换也局部在某个局部频率域上呢？假如存在一个常数 $A>0$ 使得 $suppf \subset [-A, A]$, 则称 f 为有界支集函数, 若 $\widehat{f}(w)$ 也为有界支集函数, 我们成 $f(x)$ 为有界频宽。那么, 我们的结论是：**如果 $f(x) \neq 0$ 是有界支集函数, 它就不可能是有界频宽**。我们这里只看个特例：若 $f(x) \neq 0, suppf \subset [-\pi, \pi]$, 如果 $supp\widehat{f} \subset [-\Omega, \Omega]$, 则对所有 $k \in Z$ 只要 $|k| \geq \Omega$ 就有 $\widehat{f}(k) = 0$. 套用 poission 公式，我们有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(k)e^{ikw}$$

但是有限个正弦余弦波的和，不可能是有界支集。因此，$f(x)$ 不是有界频宽。

下面我们介绍如果 $f(x)$ 是有界支集函数, 其在频率域上的表现。如所知，$\widehat{f}(w)$ 是 $R \to C$ 上的一个函数。若用定义

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\zeta x}dx, \zeta \in C$$

则可将 $\widehat{f}(w)$ 拓展到复函数。如果 $f(x) \in L^2(R)$ 且 $suppf \subset [-A, A]$ 令 $\zeta = u + iv$, 则

$e^{-i\zeta x} = |e^{vx-iux}| = |e^{vx}||e^{-iux}| = |e^{vx}| \le e^{|v||x|} \le e^{|\zeta||x|}$ 所以

$$|\widehat{f}(\zeta)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{|\zeta||x|}dx \le \int_{-A}^{A} |f(x)|dxe^{A|\zeta|}.$$

我们可以忽略一些细节，下个简单的结论：

$$suppf \subset [-A, A] \Rightarrow |\widehat{f}(\zeta)| \le Ce^{A|\zeta|}.$$

Paley-Wiener 定理说，其反向命题也是对的。即：

$$\exists A > 0, suppf \subset [-A, A] \Leftrightarrow \exists C > 0, \forall \zeta \in C, |\widehat{f}(\zeta)| \le Ce^{A|\zeta|}.$$

6 Shannon 定理

上面我们讨论了有界支集函数 $f(x)$ 在频率域上的表现，现在看看有界频宽函数在时间域上的性质。假如存在某个固定的 $N \in \mathbf{N}$ 使得当 $|w| \ge N\pi$ 时， $\widehat{f}(w) = 0$. 这表示 $f(x)$ 不含有无穷多高频分量。这就如同多项式函数没有无穷多高次项一样。可以想象这样的函数不太复杂。例如，对于三次多项式，我们可通过 4 个样本，获得该多项式表现形式。有限频宽函数也有类似特性：可从样本获得整个函数。这就是 Shannon 取样定理。与多项式不同，理论上我们需要无穷多个样本，但这些样本可以是离散的。再者， Shannon 使用函数 $sincx := \frac{\sin x}{x}$ 来合成整个函数.

事实上，我们只要知道 $f(k/N), k \in \mathbf{Z}$ 便得知

$$f(x) = \sum_k f(k/N)sinc(N\pi x - k\pi).$$

我们首先推导上述公式：若 $f(x), N$ 如前所述，则

$$\sum_k \widehat{f}(w - 2N\pi k)$$

是一个 $2N\pi$ 周期函数，且若 $w \in [-N\pi, N\pi]$, 它就是 $\widehat{f}(w)$. 套用 poisson 公式，我们有

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{2N\pi} \sum_k \mathcal{F}[\widehat{f}(w)](\frac{k}{N})e^{ikw/N},$$

此处， $w \in [-N\pi, N\pi]$.

注意到 $\mathcal{F}[\widehat{f}(w)](\frac{k}{N}) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w)e^{-ikw/N}dw = 2\pi f(-k/N)$.

因此，有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-N\pi}^{N\pi}\widehat{f}(w)e^{ixw}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2N\pi}2\pi\int_{-N\pi}^{N\pi}(\sum_k f(-k/N)e^{ikw/N})e^{ixw}dw = \frac{1}{2N\pi}\sum_k f(k/N)\int_{-N\pi}^{N\pi}e^{i(x-k/N)w}dw,
\end{aligned}
$$

上式中的积分 $2\sin(x-\frac{k}{N})N\pi/(x-\frac{k}{N})$.