Fourier 级数

目的：介绍 Fourier 级数的基本知识，及其与卷积逼近的关联。

1 概念

所谓三角多项式是以下形式的函数

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), N \in Z, a_,b_n, x \in R.$$

根据 Euler 公式， $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. 三角多项式可以写为如下形式

$$\sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{inx}, c_n \in C.$$

定义 1.1 若 $f : R \to C$ 是 2π 周期函数, 且 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ 可积。则所谓 $f(x)$ 的 *Fourier* 级数就是

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx},$$

此处,

$$f_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

2 Parseval 定理

若 $f \in L_p^2(-\pi, \pi)$, 定义其三角多项式展开为

$$\mathcal{F}_N(f, x) = \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{inx},$$

其中， $f_n = (f(x), e^{-inx})$.

Fourier 级数则为

$$\mathcal{F}(f, x) = \lim_{N\to\infty} \mathcal{F}_N(f, x).$$

定理 1

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - \mathcal{F}_n(f, x)\| = 0,$$

而且,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}|f_n|^2 = \|f(x)\|^2$$

练习 1 给出 *Parseval* 定理的证明。

3 Gibbs 现象

Parseval 定理说的是 L^2 意义下的平均收敛，这并不代表每点处三角级数均会逐点收敛，也就是

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - \mathcal{F}_n(f,x)| = 0.$$

如果 $f(x)$ 在某点 x_0 不连续，但是左右极限存在，而且 $f(x)$ 在 x_0 两侧附近平滑。则 $\mathcal{F}_N(f,x_0)$ 将收敛到 $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. 更有趣的是， $\mathcal{F}_N(f,x)$ 在 x_0 两侧都有射过的部分。这一部分的“宽度”随着 N 的增大而变窄，但高度却大约是个常数。这是一个非常著名的现象，称为 Gibbs 现象。

1898 年提出这个观察现象的是美国物理学家 Michelson, 他曾经因为测定光速以及证明以太不存在获得 1907 年的诺贝尔物理学奖。 1880 年左右，英国物理学家 Lord Kelvin 利用类比积分器发明了一种称作 Harmonic Analyzer 的计算器，其功能是可以依据输入的 $f(x)$ 图形计算其三角多项式系数，也就是 a_n, b_n, 当时用于海潮研究中。 1897 年， Michelson 设计了一些技术，使得这种计算器可以算出更高项的 Fourier 系数，起先是 20 项，后来是 80 项。他带着这个计算器参加 1900 年在巴黎举行的世界博览会得了首奖。

从这个计算器的输出， Michelson 观察到如下现象。令 $f(x) = x, x \in [-\pi, \pi)$, 并拓展为一个 2π 周期函数，显然 $f(x)$ 在 $(2k+1)\pi$ 不连续。我们只看 $-\pi, \pi$ 两点就可以了。根据

$$f(x) = 2(sinx - 1/2sin2x + 1/3sin3x - \cdots) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

下面两个图分别显示了 $n = 20, 40$ 的图形，显然 $\mathcal{F}_n(f,x)$ 都射过一点点，而且过头的程度不随着 n 的增大而降低。

1899 年， Gibbs 回应了 Michelson 的发现。他证明了，上述 $\mathcal{F}_n(f,x)$ 在 $(2k+1)\pi$ 附近最大值减去最小值趋近于 $4\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$. 上下超射的部分是 $2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx - \pi \approx 0.562281$.

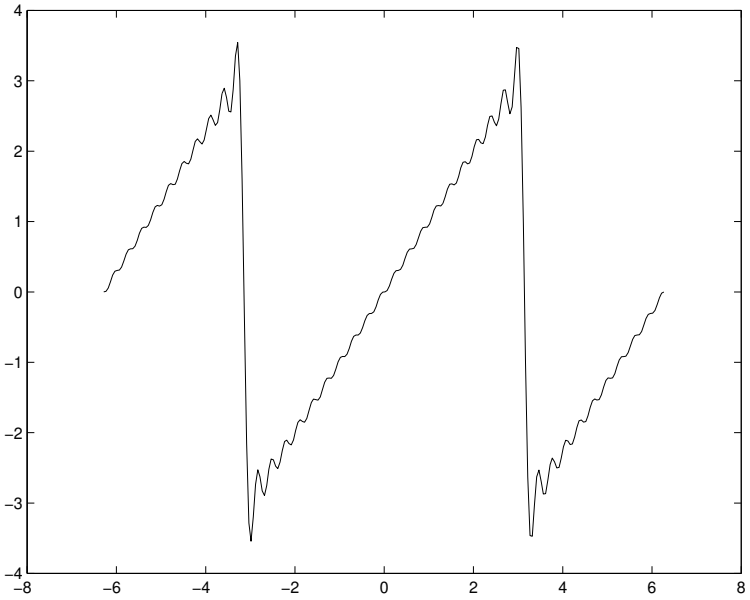

Fig.1.20 term

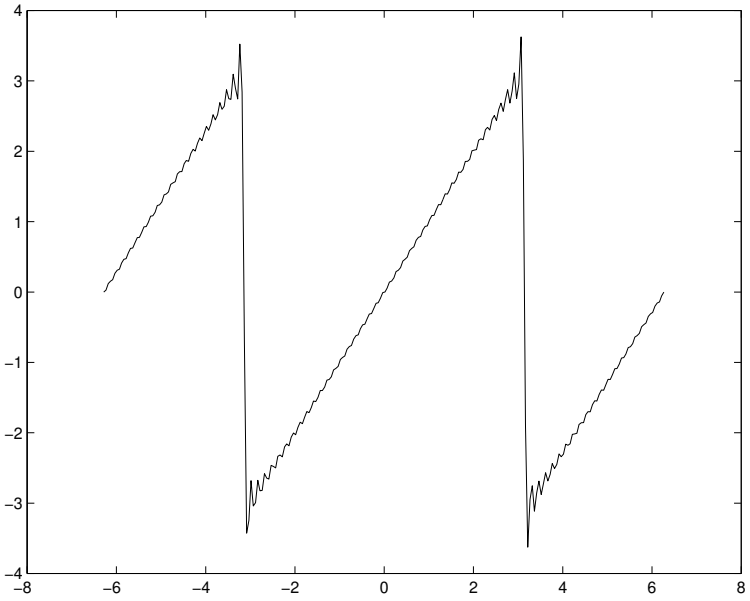

Fig.2.40 term

练习 2 利用 *Matlab* 编写程序观察 *Gibbs* 现象。

为方便计算 Gibbs 现象中超射部分, 我们取一个比较方便的 2π 周期函数 $f(x) = \pi - x, x \in [0, 2\pi)$. 这个 $f(x)$ 在 $x = 2k\pi$ 处不连续。 $f(x)$ 是奇函数, 因此 $a_n = 0$. 容易算得

$$\mathcal{F}_N(f, x) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}.$$

令 $g_N(x) = \mathcal{F}_N(f, x) - f(x)$. 则 $g'_N(x) = 2\sum_{n=1}^{N} \cos nx + 1 = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2}$. 那么, $g_N(x)$ 在 0 的右边第一个相对极值出现于 $x_N = \frac{\pi}{N+1/2}$. $g_N(x)$ 的另一个表达式是

$$g_N(x) = g_N(0) + \int_0^x \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2} dx.$$

考察

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} g_N(x_N) &= \lim_{N\to\infty} \int_0^{x_N} \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2} dx - \pi \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sin 1/2(\frac{\theta}{N+1/2})} \frac{1}{N+1/2} d\theta - \pi = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta - \pi. \end{aligned}$$

从 Gibbs 现象可以看出, 若 $f(x)$ 不连续, 则 $\mathcal{F}(f, x)$ 不会逐点收敛。

4 收敛定理

定理 2 （逐点收敛定理）若 $f(x)$ 是一个连续 2π 周期函数。对某个 x, 若存在常数 $\delta > 0, M < \infty$, 使得对所有 $h \in (-\delta, \delta)$, $|f(x+h) - f(x)| \le M|h|$. 则

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{F}_N(f, x) = f(x).$$

练习 3 给出该定理的证明。

令 Dirichlet 核 $D_N(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$. 那么

$$\mathcal{F}_N(f, x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dte^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}dt,$$

故

$$\mathcal{F}_N(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)dt.$$

因此, $\mathcal{F}_N(f, x) = D_N * f(x)$. 但是, D_N 不是 $Dirichlet$ 序列。一个自然的问题是：我们能否修改 D_N 使其成为 $Dirichlet$ 序列？

我们定义 K_n 为 $Dirichlet$ 序列的平均值，即

$$K_n = \frac{1}{n}(D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1}).$$

通过三角恒等式简单计算可以发现

$$K_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}.$$

上式说明 $K_n(x) \geq 0$, 这是 $Dirichlet$ 序列第一个条件。

容易验证 $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1$ 与性质 3 。

因此

序列 $\{K_n\}$ 是一个 Dirac 序列。

那么，我们有

定理 3 设 f 是分段连续的周期函数。那么

$$\frac{1}{n}(\mathcal{F}_0(x) + \mathcal{F}_1(x) + \cdots + \mathcal{F}_{n-1}(x)) \to f(x)$$

在每一个 f 连续的紧集上一致成立。

待续