小波， 5 及课程总结

目的：介绍小波框架与 Gabor 框架的条件。

1. **小波框架**

令 $\psi_{mn} = a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x - nb_0)$, 我们考察 ψ, a_0, b_0 需要满足什么样的条件， ψ_{mn} 才能做成一个框架。注意

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n} |< f, \psi_{mn} >|^2 = \sum_{m,n} |\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) a_0^{m/2} \overline{\widehat{\psi}(a_0^m w)} e^{ib_0 a_0^m nw} dw|^2 \\
= &\sum_{m,n} a_0^m |\int_0^{2\pi b_0^{-1} a_0^{-m}} e^{ib_0 a_0^m nw} \sum_l \widehat{f}(w + 2\pi l a_0^{-m} b_0^{-1}) \overline{\widehat{\psi}(a_0^m w + 2\pi l b_0^{-1})} dw|^2 \\
= &\frac{2\pi}{b_0} \sum_m \int_0^{2\pi b_0^{-1} a_0^{-m}} |\sum_l \widehat{f}(w + 2\pi l a_0^{-m} b_0^{-1}) \overline{\widehat{\psi}(a_0^m w + 2\pi l b_0^{-1})}|^2 dw \\
= &\frac{2\pi}{b_0} \sum_{m,k} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \overline{\widehat{f}(w + 2\pi k a_0^{-m} b_0^{-1}) \widehat{\psi}(a_0^m w)} \widehat{\psi}(a_0^m w + 2\pi k b_0^{-1}) dw \\
= &\frac{2\pi}{b_0} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|^2 \sum_m |\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2 dw + Rest(f).
\end{aligned}$$

此处，应用 Cauchy-Schwarz 公式可推得

$$|Rest(f)| \le \frac{2\pi}{b_0} \|f\|^2 \sum_{k \neq 0} [\beta(\frac{2\pi}{b_0} k) \beta(\frac{-2\pi}{b_0} k)]^{1/2}$$

此处， $\beta(s) = \sup_w \sum_m |\widehat{\psi}(a_0^m w)||\widehat{\psi}(a_0^m w + s)|$.

根据上述结果,

$$\inf_{f, f \neq 0} \|f\|^{-2} \sum_{m,n} |< f, \psi_{m,n} >|^2 \ge \frac{2\pi}{b_0} \{\inf_w \sum_m |\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2 - \sum_{k \neq 0} (\beta(2\pi/b_0 k) \beta(-2\pi/b_0 k))^{1/2}\}$$

$$\sup_{f, f \neq 0} \|f\|^{-2} \sum_{m,n} |< f, \psi_{m,n} >|^2 \le \frac{2\pi}{b_0} \{\sup_w \sum_m |\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2 + \sum_{k \neq 0} (\beta(2\pi/b_0 k) \beta(-2\pi/b_0 k))^{1/2}\}$$

因此，为保证 ψ_{mn} 做成一个框架，我们要求 $\alpha \le \sum_m |\psi(a_0^m w)|^2 \le \beta$, 且 $\beta(s)$ 有一定的延迟性，更准确的，我们有如下定理：

定理 1 如果 ψ, a_0 使

$$\inf_{1 \le |w| \le a_0} \sum_m |\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2 > 0, \quad \sup_{1 \le |w| \le a_0} \sum_m |\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2 < \infty,$$

并且 $\beta(s)=\sup_w\sum_m|\widehat{\psi}(a_0^m w)||\widehat{\psi}(a_0^m w+s)|$ 至少像 $(1+|s|)^{-(1+\varepsilon)},\varepsilon>0$ 一样快速衰减，那么存在 $b^*>0$ 使对于所有 $b_0<b^*,\psi_{mn}$ 构成一个框架。下述是框架的界

$$A=\frac{2\pi}{b_0}\{\inf_{1\le|w|\le a_0}\sum_m|\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2-\sum_{k\neq0}(\beta(2\pi/b_0k)\beta(-2\pi/b_0k))^{1/2}\}$$

$$B=\frac{2\pi}{b_0}\{\sup_{1\le|w|\le a_0}\sum_m|\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2+\sum_{k\neq0}(\beta(2\pi/b_0k)\beta(-2\pi/b_0k))^{1/2}\}$$

2.Gabor **框架**

我们考察另外一种类型的框架

$$g_{mn}(x)=e^{imw_0x}g(x-nt_0)$$

利用与上面类似的计算方法，我们有

$$\inf_{f,f\neq0}\|f\|^{-2}\sum_{m,n}|<f,g_{m,n}>|^2\ge\frac{2\pi}{w_0}\{\inf_x\sum_n|g(x-nt_0)|^2-\sum_{k\neq0}(\beta(2\pi/w_0k)\beta(-2\pi/w_0k))^{1/2}\}$$

$$\sup_{f,f\neq0}\|f\|^{-2}\sum_{m,n}|<f,\psi_{m,n}>|^2\le\frac{2\pi}{w_0}\{\sup_x\sum_n|\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2+\sum_{k\neq0}(\beta(2\pi/w_0k)\beta(-2\pi/w_0k))^{1/2}\}$$

此处，$\beta(s)=\sup_s\sum_n|g(x-nt_0)||g(x-nt_0+s)|$.

同上，我们可有如下定理

定理 2 如果 g,t_0 使

$$\inf_{0\le x\le t_0}\sum_n|g(x-nt_0)|^2>0,\ \sup_{0\le x\le t_0}\sum_n|g(x-nt_0)|^2<\infty,$$

并且 $\beta(s)$ 至少像 $(1+|s|)^{-(1+\varepsilon)},\varepsilon>0$ 一样快速衰减，那么存在 $w_0^*>0$ 使对于所有 $w_0<w_0^*,g_{mn}$ 构成一个框架。下述是框架的界

$$A=\frac{2\pi}{w_0}\{\inf_x\sum_n|g(x-nt_0)|^2-\sum_{k\neq0}(\beta(2\pi/w_0k)\beta(-2\pi/w_0k))^{1/2}\}$$

$$B=\frac{2\pi}{w_0}\{\sup_x\sum_n|\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2+\sum_{k\neq0}(\beta(2\pi/w_0k)\beta(-2\pi/w_0k))^{1/2}\}$$