# 小波，4

**目的：介绍框架理论与小波框架。**

## 1 离散小波变换

我们先前考虑的小波基底 $\psi_{mn}$, 通常要求他们彼此正交，且能生成 $L^2(R)$ 空间。显然，这需要精心设计 $\psi$ 。

在这一部分里边，我们考察一个函数 $\psi$ ，其相应的离散族是

$$\psi_{mn}(x) = a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x - nb_0),$$

此处， $a_0 > 1, b_0 > 0$ 是固定的。我们的对 $\psi$ 的要求很少，这将在下边的推导里边逐渐显现出来。

我们现在关心的两个问题是：

（ 1 ）离散小波系数 $< f, \psi_{mn} >$ 完全特征化 $f$ 了吗，或者更强的，我们能够由 $< f, \psi_{mn} >$ 用数值稳定的方法重构 $f$ 吗？

（ 2 ）任意一个函数 $f$ 能写成 $\psi_{mn}$ 的一种叠加吗？在这种叠加中，能写出求叠加系数的一种简单算法吗？

事实上，上述两个问题只是一个问题的对偶形式。如果重构问题可以回答，就是说对于合适的 $\psi$ 及适当的 $a_0, b_0$, 存在 $\widetilde{\psi}_{mn}$, 使得

$$f = \sum_{mn} < f, \psi_{mn} > \widetilde{\psi}_{mn}.$$

那么，就可有那么，对任意 $g \in L^2(R)$,

$$< f, g >= \sum_{mn} < g, \widetilde{\psi}_{mn} >< \psi_{mn}, f >$$

那么，至少在较弱的意义上， $g = \sum_{mn} < g, \widetilde{\psi}_{mn} > \psi_{mn}$.

（显然，如果 $\psi_{mn}$ 彼此正交，这两个问题可用恒等式直接得到。）

我们先考察问题（ 1 ），通常限制 $f \in L^2(R)$.

函数能够用它的小波系数 $< f, \psi_{mn} >$ 特征化，如果 $< f_1, \psi_{mn} >=< f_2, \psi_{mn} >, \forall m, n \in Z$ 推出 $f_1 \equiv f_2$. 更多的，我们希望由 $< f, \psi_{mn} >$ 数值稳定的重建 $f$. 为了使这样一个算法存

在，必须确定，如果 $\{< f_1, \psi_{mn} >\}$ “接近” $\{< f_2, \psi_{mn} >\}$，那么必然 $f_1, f_2$ 也是 “接近” 的。我们通常要求 $\{< f_1, \psi_{mn} >\} \in l^2$. 事实上，任意适当的小波 $\psi$, 选取任何 $a_0 > 1, b_0 > 0$ 导致

$$\sum_{mn} | < f, \psi_{mn} > |^2 \leq B\|f\|^2.$$

我们先假设上式成立，稳定性的要求是说，如果 $\sum_{mn} | < f, \psi_{mn} > |^2$ 小，那么 $\|f\|^2$ 也比较小，这等价于，存在 $A \in R$ 使得

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{mn} | < f, \psi_{mn} > |^2.$$

综合上述两个式子，存在 $0 < A, B < \infty$ 使得

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} | < f, \psi_{mn} > |^2 \leq B\|f\|^2$$

对所有的 $f \in L^2(R)$ 成立，此时，我们说 $\{\psi_{mn}, n, m \in Z\}$ 构成一个框架。

## 2 框架

框架是 1952 年，在非调和 Fourier 级数的研究中引入的。这里讨论它的定义和性质。

**定义 1** 在 *Hilbert* 空间 $\mathcal{H}$ 中一族函数 $\{\varphi_j\}$ 称为是一个框架，如果存在 $0 < A, B < \infty$ 对于所有 $f \in \mathcal{H}$ 有

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j} | < f, \varphi_j > |^2 \leq B\|f\|^2$$

并称 $A, B$ 为框架的界，如果两个框架界相等，则称框架是紧框架。

对于紧框架，我们有

$$\sum_{j} | < f, \varphi_j > |^2 = A\|f\|^2,$$

更进一步，可得到

$$f = A^{-1} \sum_{j} < f, \varphi_j > \varphi_j,$$

上式可让人想起正交基的表示，但是框架，甚至紧框架也不一定是正交基，看如下例子：

取 $\mathcal{H} = R^2, e_1 = (0, 1), e_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2), e_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$. 对任意 $v = (v_1, v_2)$ 有 $\sum_{j=1}^{3} | < v, e_j > |^2 = \frac{3}{2}\|v\|^2$, 因此， $\{e_1, e_2, e_3\}$ 组成一个紧框架。更进一步，我们有

**定理 1** 如果 $\{\varphi_j\}$ 是一个紧框架，而框架界 $A=1$ ，并且如果 $\|\varphi_j\|=1$ 对于所有 $j$ 成立，那么 $\{\varphi_j\}$ 构成 $\mathcal{H}$ 的一个正交基。

如果框架是紧框架，那么我们可用

$$f = A^{-1}\sum_j < f, \varphi_j > \varphi_j,$$

复原 $f$. 对于一般框架，我们引入框架算子的概念。 $\{\varphi_j\}$ 是 $\mathcal{H}$ 中一个框架，那么框架算子 $F$ 是由 $\mathcal{H}$ 到 $l^2$ 的线性算子。定义为

$$(F(f))_j =< f, \varphi_j > .$$

根据框架的定义， $\|Ff\|^2 \le B\|f\|^2$, 即 $f$ 是有界的。 $F$ 的伴随算子 $F^*$ 是容易计算的

$$F^*\mathbf{c} = \sum_j c_j\varphi_j.$$

因为有 $\|F^*\| = \|F\|$, 所以

$$\|F^*\mathbf{c}\| \le B^{1/2}\|\mathbf{c}\|.$$

根据 $F$ 定义

$$\sum_{j\in J} | < f, \varphi_j > |^2 = \|Ff\|^2 =< F^*Ff, f >,$$

因此，框架条件能够改写为

$$AId \le F^*F \le BId,$$

此处， $Id$ 为恒等算子，上式隐含 $F^*F$ 可逆，这用下述基本引理给出

**引理 1** 如果在 $\mathcal{H}$ 上的一个正有界线性算子 $S$ 有一个严格正常数 $\alpha$ 下界，那么 $S$ 可逆，而且 $S^{-1}$ 可用 $\alpha^{-1}$ 界定。

事实上有

$$B^{-1}Id \le (F^*F)^{-1} \le A^{-1}Id$$

应用 $(F^*F)^{-1}$ 到向量 $\varphi_j$ 可得到一个有趣的新向量族，表示为 $\widetilde{\varphi}_j := (F^*F)^{-1}\varphi_j$. 可证明 $\widetilde{\varphi}_j$ 也可表示为一个新的框架，框架界为常数 $B^{-1}, A^{-1}$. 此外，我们有

$$\sum_j < f, \varphi_j > \widetilde{\varphi}_j = f = \sum_j < f, \widetilde{\varphi_j} > \varphi_j.$$

这意味着，对于 $f$ 由 $< f, \varphi_j >$ 可重构，同时 $f$ 也可写为 $\varphi_j$ 的一种叠加方法。

给了一个框架，为了应用上式，我们需要计算 $\widetilde{\varphi}_j := (F^*F)^{-1}\varphi_j$.

如同我们以上所说，框架，甚至紧框架，一般不是基，因为它们不是线性无关的。这意味着，对于同一个 $f$ 可以有不同的叠加表示方式。

我们还是考虑上面提到的 $e_1, e_2, e_3$ 组成框架的例子。对任意 $v \in R^2$ 有

$$v = 2/3 \sum_{j=1}^{3} < v, e_j > e_j$$

注意到 $\sum_j e_j = 0$, 因此

$$v = 2/3 \sum_{j=1}^{3} (< v, e_j > +\alpha) e_j$$

对任意的 $\alpha$ 成立。注意到 $\sum_j | < v, e_j > |^2 = 3/2\|v\|^2$ ，但是

$$\sum_j | < v, e_j > +\alpha|^2 = \frac{3}{2}\|v\|^2 + 2\alpha^2 > \frac{3}{2}\|v\|^2, \alpha \neq 0.$$

更进一步，我们有

**定理 2** 如果 $f = \sum_j c_j \varphi_j$ 对于某个 $c = \{c_j\}$ 成立, 而且并不是所有 $c_j$ 都等于 $< f, \widetilde{\varphi}_j >$ 那么

$$\sum_j |c_j|^2 > \sum_j | < f, \widetilde{\varphi}_j > |^2.$$

现在返回到重构问题。关键是求 $\widetilde{\varphi}_j := (F^*F)^{-1}\varphi_j$. 如果 $B, A$ 彼此接近, 就是 $r = B/A - 1$ 远小于 1 ，那么 $F^*F$ 接近 $\frac{A+B}{2}Id$, 所以 $(F^*F)^{-1}$ 接近 $\frac{2}{A+B}Id$, 并且 $\widetilde{\varphi}_j$ 接近 $\frac{2}{A+B}\varphi_j$. 精确的

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_j < f, \varphi_j > \varphi_j + Rf,$$

此处， $R = Id - 2/(A+B)F^*F$, 因之， $\|R\| \leq \frac{B-A}{B+A} = r/(2+r)$. 如果 $r$ 比较小, 可省去余项 $Rf$. 如果 $r$ 不是很小，也能写出具有指数收敛的 $f$ 的重构算法。根据如上的 $R$ 的定义，我们有

$$F^*F = (A+B)/2(Id - R),$$

因此 $(F^*F)^{-1} = \frac{2}{A+B}(Id-R)^{-1}$. 注意到 $\|R\| < 1$,$\widetilde{\varphi}_j := (F^*F)^{-1}\varphi_j = 2/(A+B)\sum_{k=0}^{\infty} R^k \varphi_j$.

截取 $N$ 项，得到的逼近记为

$$\widetilde{\varphi}_j^N = \frac{2}{A+B}\sum_{k=0}^{N} R^k\varphi_j,$$

而

$$\|f - \sum_j < f, \varphi_j > \widetilde{\varphi}_j^N\| \le (\frac{r}{2+r})^{N+1}\|f\|.$$

## 3 小波框架

上一节我们谈到，为了由 $< f, \psi_{mn} >$ 得到 $f$ 的一个数值稳定的重构算法，要求 $\psi_{mn}$ 构成一个框架，而且，如果 $\psi_{mn}$ 构成一个框架，可求得由 $< f, \psi_{mn} >$ 重构 $f$ 的一个算法。对于这个算法，框架界的比是重要的。下面定理说明，要求 $\psi_{mn}$ 构成一个框架已经强制 $\psi$ 是容许的。

**定理 3** 如果 $\psi_{mn} = a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x - nb_0), m, n \in Z$ 对于 $L^2(R)$ 构成具有框架界 $A$,$B$ 的一个框架，那么

$$\frac{b_0 lna_0}{2\pi}A \le \int_0^\infty w^{-1}|\widehat{\psi}(w)|^2 dw \le \frac{b_0 lna_0}{2\pi}B$$

$$\frac{b_0 lna_0}{2\pi}A \le \int_{-\infty}^0 |w|^{-1}|\widehat{\psi}(w)|^2 dw \le \frac{b_0 lna_0}{2\pi}B$$

在上述定理中,如果 $\psi_{mn}$ 构成 $L^2(R)$ 的正交基,那么 $\int_0^\infty w^{-1}|\widehat{\psi}(w)|^2 dw = \int_{-\infty}^0 |w|^{-1}|\widehat{\psi}(w)|^2 dw = \frac{b_0 lna_0}{2\pi}$.

应当注意到，即使 $\psi$ 是容许的，也不是对于 $\psi$,$a_0, b_0$ 的所有选择都导致小波框架。下面讨论产生小波框架而加于 $\psi, a_0, b_0$ 的条件，并且估计相应的框架界。

**定理 4** 如果 $\psi, a_0$ 使

$$\inf_{1\le|w|\le a_0}\sum_m |\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2 > 0, \inf_{1\le|w|\le a_0}\sum_m |\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2 < \infty,$$

并且 $\beta(s) = \sup_w \sum_m |\widehat{\psi}(a_0^m w)||\widehat{\psi}(a_0^m w + s)|$ 至少像 $(1+|s|)^{-(1+\varepsilon)}, \varepsilon > 0$ 一样快速衰减，那么存在 $b^* > 0$ 使对于所有 $b_0 < b^*, \psi_{mn}$ 构成一个框架。下述是框架的界

$$A = \frac{2\pi}{b_0}\{\inf_{1\le|w|\le a_0}\sum_m |\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2 - \sum_k (\beta(2\pi/b_0 k)\beta(-2\pi/b_0 k))^{1/2}\}$$

$$B = \frac{2\pi}{b_0}\{\inf_{1\le|w|\le a_0}\sum_m |\widehat{\psi}(a_0^m w)|^2 + \sum_k (\beta(2\pi/b_0 k)\beta(-2\pi/b_0 k))^{1/2}\}$$

下面研究小波 $\psi_{mn}$ 的对偶，即： $\widetilde{\psi_{mn}} = (F^*F)^{-1}\psi_{mn}$ 。由于计算对偶框架 $\widetilde{\psi_{mn}}$ 个数太多，带来很大的不便，所以我们希望 $\widetilde{\psi_{mn}}$ 由一个 $\widetilde{\psi}$ 产生。但是，不幸的是， $\widetilde{\psi_{mn}}$ 一般不能由一个 $\widetilde{\psi}$ 产生。但是我们还是可以进行一些简化。引入记号

$$(D^m f)(x) = a_0^{-m/2} f(a_0^{-m}x), (T^n f)(x) = f(x - nb_0)$$

那么，容易验证，对于所有 $f \in L^2(R), F^*FD^m f = D^m F^*Ff$, 由此得到 $(F^*F)^{-1}$ 与 $D^m$ 可交换。特别地，因为 $\psi_{mn} = D^m T^n \psi, \widetilde{\psi_{mn}} = (F^*F)^{-1} D^m T^n \psi = D^m (F^*F)^{-1} T^n \psi$ 或者

$$\widetilde{\psi_{mn}}(x) = a_0^{-m/2} \widetilde{\psi_{0n}}(a_0^{-m}x).$$

但 $T^n$ 与 $F^*F$ 不可交换。