小波，3

目的：介绍紧支集正交小波基底的构造。

1 m_0 的构造

这一讲里边，我们主要考虑建造紧支集正交小波基底 ψ 。最容易产生紧支集正交小波基 ψ 的方法是选择紧支集的尺度函数 φ 。根据 h_n 的定义

$$h_n = \sqrt{2}\int \varphi(x)\overline{\varphi(2x-n)}dx,$$

因此，仅仅有限个 h_n 非 0 。 ψ 可写作有限个紧支集函数的组合，因此此时 ψ 也是紧支集的。对于紧支集的函数 φ, $m_0(w) := \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n e^{-inw}$ 为一个三角多项式。就像我们以前推导的，根据 φ_{0n} 的正交性可推出

$$|m_0(w)|^2 + |m_0(w+\pi)|^2 = 1.$$

同时，我们也希望 ψ 也具有一定的规则性，根据上讲的推导，这意味着 m_0 能写成如下形式

$$m_0(w) = (\frac{1+e^{-iw}}{2})^N \mathcal{L}(w).$$

我们可令 $M_0(w) = |m_0(w)|^2$ ($M_0(w)$ 为关于 $\cos w$ 的多项式)，那么 $M_0(w)$ 满足

$$M_0(w) + M_0(w+\pi) = 1, M_0(w) = (\cos^2(w/2))^N L(w),$$

此处， $L(w) = |\mathcal{L}(w)|^2$ 也是一个关于 $\cos w$ 的多项式。利用公式 $\sin^2(w/2) = (1-\cos w)/2$, $L(w)$ 可看作关于 $\sin^2(w/2)$ 的多项式，将这一多项式记为 $P(\sin^2(w/2))$, 因此

$$M_0(w) = (\cos^2(w/2))^N P(\sin^2(w/2)).$$

根据约束 $M_0(w) + M_0(w+\pi) = 1$, 我们有

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1. \tag{1}$$

(根据上述推导，可得到上式对 $y \in [0,1]$ 成立，根据多项式性质，上述对任意的 y 成立。)

为了求解 (1), 我们介绍如下定理

定理 1 如果 p_1, p_2 是两个次数分别为 n_1, n_2 的多项式，且没有公共零点，那么存在唯一的次数不超过 $n_1 - 1, n_2 - 1$ 的多项式 q_1, q_2 ，使得

$$p_1(x)q_1(x) + p_2(x)q_2(x) = 1.$$

根据上述定理，存在次数不超过 $N-1$ 的一元多项式 q_1, q_2 ，使得

$$(1-y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1,$$

在上式中，将 y 用 $1-y$ 替换，我们有

$$(1-y)^N q_2(1-y) + y^N q_1(1-y) = 1.$$

根据唯一性，我们有 $q_2(y) = q_1(1-y)$. 因此， $P(y) = q_1(y)$. 根据

$$(1-y)^N q_1(y) + y^N q_1(1-y) = 1.$$

我们有

$$q_1(y) = (1-y)^{-N}[1 - y^N q_1(1-y)] = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + O(y^N)$$

因为 $deg q_1 \leq N-1$, 因此

$$q_1(y) = (1-y)^{-N}[1 - y^N q_1(1-y)] = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

因此， $P(y) = q_1(y)$ 为 (1) 唯一的次数最低的解，我们将其标记为 $P_N(y)$. 当然存在更高次数的解，对任意更高次数的解 $P(y)$, 我们有

$$(1-y)^N (P(y) - P_N(y)) + y^N (P(1-y) - P_N(1-y)) = 0$$

由此可推出 $P - P_N$ 可被 y^N 整除，即

$$P(y) - P_N(y) = y^N \tilde{P}(y).$$

此外,

$$\tilde{P}(y) + \tilde{P}(1-y) = 0,$$

也就是关于 $1/2$ 出反对称。

我们可总结上述结果如下

定理 2 如下形式的三角多项式

$$m_0(w) = \frac{1+e^{-iw}}{2}\mathcal{L}(w)$$

满足

$$|m_0(w)|^2 + |m_0(w+\pi)|^2 = 1,$$

如果和仅仅如果 $L(w) = |\mathcal{L}(w)|^2$ 能写作

$$L(w) = P(\sin^2(w/2)),$$

此处， $P(y) = P_N(y) + y^N R(\frac{1}{2} - y), P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k$, R 是一个奇多项式，且使得 $P(y) \geq 0, \forall y \in [0,1]$.

事实上，上述定理给出了 $|m_0(w)|^2$ 的特征，但是我们需要的是 $m_0(w)$. 我们可根据下述定理将 ” 平方 ” 去掉：

引理 1 令 A 是一个正三角多项式，且在 $w \to -w$ 变换下不变；那么 A 必须有如下形式

$$A(w) = \sum_{m=0}^{M} a_m \cos mw, a_m \in R$$

那么存在一个阶 M 三角多项式 B,*i.e.*

$$B(w) = \sum_{m=0}^{M} b_m e^{imw}, b_m \in R$$

使得 $|B(w)|^2 = A(w)$.

组合上述两个结论，我们能够找到所有满足

$$|m_0(w)|^2 + |m_0(w+\pi)|^2 = 1, m_0(w) = (\frac{1+e^{-iw}}{2})^N \mathcal{L}(w)$$

的三角多项式 $m_0(w)$. 但是，并非每一个这样的 m_0 都对应着一个正交小波基底。

2 与正交小波的关联性

我们从考察尺度函数开始。如果 m_0 与一个多尺度分析相关，且相应的尺度函数 $\varphi \in L^1(R)$, 那么我们有

$$\widehat{\varphi}(w) = m_0(w/2)\widehat{\varphi}(w/2).$$

考虑到 φ 的正交性，我们有

$$\widehat{\varphi}(w)=\prod_{j=1}^{\infty}m_0(2^{-j}w).$$

但是，并非每一个如此构造出的 φ 均为正交的。考虑如下反例：

$$m_0(w)=\frac{1+e^{-iw}}{2}(1-e^{-iw}+e^{-2iw})=\frac{1+e^{-3iw}}{2}=e^{-3iw/2}\cos(3w/2),$$

$m_0(w)$ 满足我们需要的条件，但是，

$$\widehat{\varphi}(w)=e^{-3iw/2}\frac{\sin 3w/2}{3w/2}.$$

与之相应的 $\varphi(x)$ 不能产生一个正交基底。

那么，什么样的 $m_0(w)$ 才能使得 $\varphi(x)$ 做成一个正交基？下面的定理介绍了一个充要条件。为介绍这个定理，我们首先引入一个定义

定义 1 紧集 K 称为与 $[-\pi,\pi]$ 在模 2π 的意义下一致，如果 *1.* $|K|=2\pi$*; 2.* 对任意的 $w\in[-\pi,\pi]$, 存在 $l\in Z$ 使得 $w+2l\pi\in K$.

定理 3 假设 m_0 是一个三角多项式，且满足

$$|m_0(w)|^2+|m_0(w+\pi)|^2=1, m_0(0)=1,$$

φ 通过如下方式定义：

$$\widehat{\varphi}(w)=\prod_{j=1}^{\infty}m_0(2^{-j}w).$$

那么，下边两个叙述等价

1.

$$\int\varphi(x)\overline{\varphi(x-n)}dx=\delta_{n0}$$

2. 存在一个与 $[-\pi,\pi]$ 在模 2π 的意义下一致的紧集 K, 且包含 0 的一个邻域,

$$\inf_{k>0}\inf_{w\in K}|m_0(2^{-k}w)|>0.$$

作为上述定理得推论，我们有

推论 1 假设 m_0 是一个三角多项式，且满足

$$|m_0(w)|^2+|m_0(w+\pi)|^2=1, m_0(0)=1,$$

φ 通过如下方式定义：

$$\widehat{\varphi}(w) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}w).$$

如果 m_0 在 $[-\pi/3, \pi/3]$ 上没有 *0* 点，那么 φ_{0n} 彼此正交。

3 紧支集小波的例子

利用公式 $P(y) = P_N(y) + y^N R(\frac{1}{2} - y)$, 选择不同的 N 和 R.

一类正交小波基选择 $R \equiv 0$. 那么便有 $L(w) = P_N(\sin^2(w/2))$. 那么我们从中可计算出 $\mathcal{L}(w)$ 使得 $L(w) = |\mathcal{L}(w)|^2$. 对固定的 N 我们可得到相应的 $m_0(w) = (\frac{1+e^{-iw}}{2})^N \mathcal{L}(w)$. 由此可得相应的 φ, ψ. 下边分别画出了 N=2,3,4,5 时的 φ, ψ 函数图。

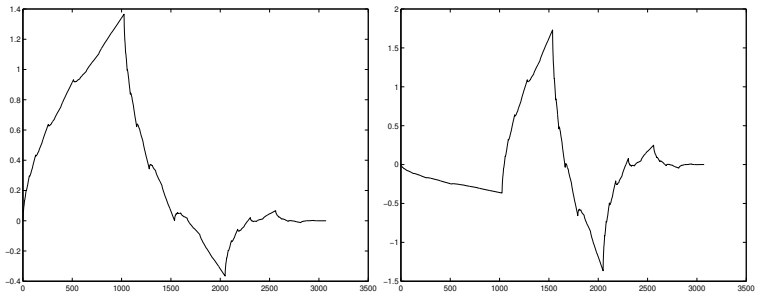

Fig. 1. N=2

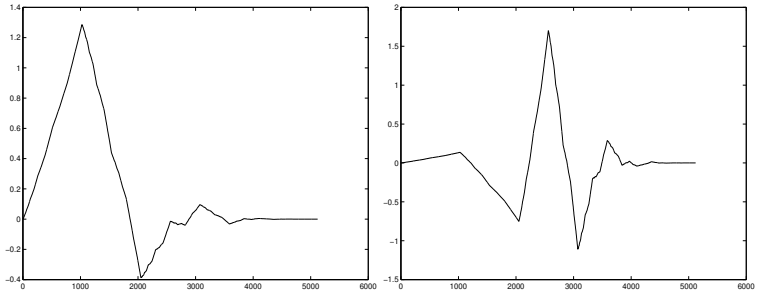

Fig. 2. N=3

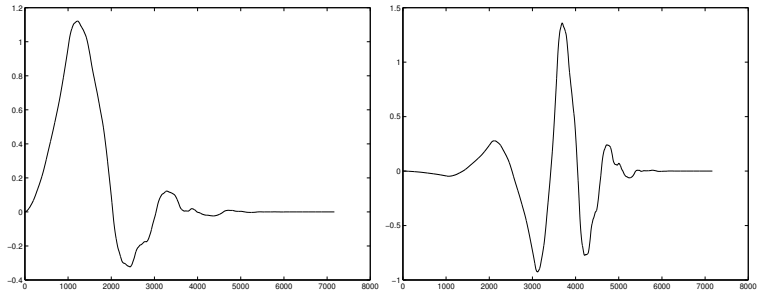

Fig. 3. N=4

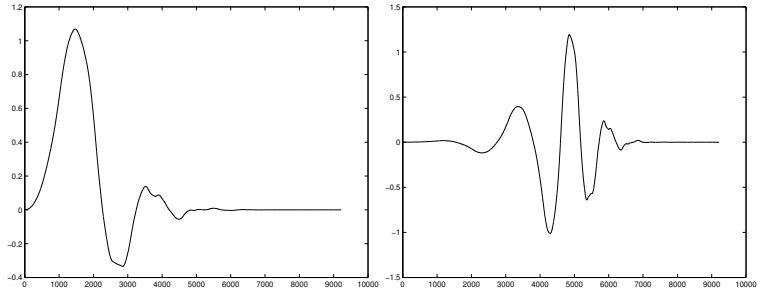

Fig. 4. N=5