Weierstrass 定理与卷积逼近

目的：讲解 Weierstrass 定理的 Berstein 证明方式，由此引出现代的 Dirac 序列，并基于此证明 Weierstrass 定理。由 Dirac 序列引出圆盘上调和函数逼近的构造方法。

定理 1 设 $f(x) \in [a,b]$, 那么对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在这样的多项式 $P(x)$ 使得

$$\max_{a \le x \le b} |P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

我们首先介绍 Bernstein 的证明方法。

证明 通过简单的变换，上述区间可换为 $[0,1]$. 那么对于给定的 $f(x) \in C[0,1]$, 作如下多项式

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

因此，只需证明对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 均可找到充分大的 N, 使得当 $n > N$ 时均有

$$\max_x |B_n^f(x) - f(x)| < \varepsilon$$

根据一致连续的定义， $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon), s.t.\ |f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon, |x - \frac{k}{n}| < \delta(\varepsilon)$. 我们记 $B_n^k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

$$\begin{aligned}
f(x) - B_n^f(x) &= \sum_k (f(x) - f(\frac{k}{n})) B_n^k(x) = \sum_{|x-\frac{k}{n}| < \delta(\varepsilon)} (f(x) - f(\frac{k}{n})) B_n^k(x) \\
&+ \sum_{|x-\frac{k}{n}| \ge \delta(\varepsilon)} (f(x) - f(\frac{k}{n})) B_n^k(x) \le \varepsilon + 2M \sum_{|x-\frac{k}{n}| \ge \delta(\varepsilon)} B_n^k(x) \\
&\le \varepsilon + \frac{1}{\delta(\varepsilon)^2} \sum_k (x - \frac{k}{n})^2 B_n^k(x) \le \varepsilon + \frac{1}{\delta(\varepsilon)^2} (x^2 - 2x^2 + x^2 + x(1-x)/n) \\
&\le \varepsilon + \frac{1}{4n\delta(\varepsilon)^2}
\end{aligned}$$

因此，当 n 充分大时，上式可充分小。

Bernstein **基底二维推广**

面积坐标的定义：三角形 abc 内一点 p 可表示为 $p = ua + vb + wc, u + v + w = 1$. $u = \frac{A(pbc)}{A(abc)}, v = \frac{A(pca)}{A(abc)}, w = \frac{A(pab)}{A(abc)}$

Bernstein 基底为 $\frac{n!}{i!j!k!}u^iv^jw^k, i+j+k=n$, 此基底对应相应的函数值为 $f(i/n, j/n, k/n)$, 此处， $i/n, j/n, k/n$ 为面积坐标。

注 1 *Bernstein* 基底在高维的推广； *Bernstein* 基底与 *Bezier* 曲线的关系。

卷积：对于定义在 R 上的函数 f, g, 卷积可通过如下方式形式定义

$$(f*g)(x)=\int_R f(x-t)g(t)dt$$

定理 2 若 f 和 g 属于 $L^1(R)$, 那么 $f*g\in L^1(R)$,, 并且 $\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$.

证明：令 $F(x,t)=f(t)g(x-t)$.

$$\|f*g\|_1=\int|\int F(x,t)dt|dx\le\int\int|F(x,t)|dtdx=\int\int|F(x,t)|dxdt=\|f\|_1\|g\|_1.$$

卷积的性质

$f*g=g*f, f*(g_1+g_2)=f*g_1+g*g_2, (f*g)*h=f*(g*h)$.

Dirac **序列**

Dirac 序列是指满足下列性质的连续函数序列 $\{K_n\}$

1. 对所有 $n=1,2,\cdots,K_n\ge 0$.

2. $\int K_n(x)dx=1$.

3. 给定 $\varepsilon>0,\delta>0$, 存在 n_0 使得对所有 $n>n_0$ 均有

$$\int_{|x|\ge\delta}K_n(x)dx<\varepsilon.$$

定理 3 设 f 是 R 上有界且连续的函数，那么序列 $\{K_n*f\}$ 在每一个紧集上一致收敛于 f.

证明：

$$K_n*f(x)-f(x)=\int K_n(t)f(x-t)dt-f(x)\int K_n(t)dt=\int K_n(t)(f(x-t)-f(x))dt$$

设 S 是一紧集，那么 f 在 S 上一致连续。因此，任给 $\varepsilon>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得对所有 $x\in S$ 及 $|t|<\delta$ 有

$$|f(x-t)-f(x)|<\varepsilon.$$

$$\begin{aligned}|K_n * f(x) - f(x)| &= \int_{|t|\le\delta} K_n(t)|f(x-t)-f(x)|dt + \int_{|t|\ge\delta} K_n(t)|f(x-t)-f(x)|dt \\ &\le \int K_n(t)\varepsilon dt + \varepsilon 2B, (n \ge n_0).\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式，是根据 $K_n(t)$ 的性质 3 得到的。

下面我们用卷积逼近证明 Weierstrass **逼近定理**。

此处，我们取 $Dirac$ 序列为

$$K_n(x) = \frac{1}{c_n}(1-x^2)^n, -1 \le x \le 1, K_n(x) = 0, |x| > 1.$$

c_n 选取为使得 $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n = 1$. 可验证 K_n 满足 Dirac 序列条件。因此， $K_n * f$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f. 现在只需证明 $K_n * f$ 为多项式. 考察

$$K_n * f = \int_{-1}^{1} K_n(x-t)f(t)dt$$

将 $K_n(x-t)$ 展开成 x,t 的多项式,那么 $K_n(x-t) = \sum a_{ij}^{(n)} x^i t^j$. $K_n * f(x) = \sum a_{ij}^{(n)} x^i \int_{-1}^{1} t^j f(t)dt = \sum_i \sum_j a_{ij}^{(n)} b_j x^i$.

Dirac **族**

对 $0 \le r < 1$, 定义一个 $Dirac$ 族 K_r 为

（ 1 ）对所有 $0 \le r < 1$ ，有 $K_r(t) \ge 0$.

（ 2 ）对所有 $0 \le r < 1$ ，有 $\int_{-\pi}^{\pi} K_r(t)dt = 1$.

(3) 对给定的 $\varepsilon > 0, \delta > 0$, 存在 r_0 满足 $0 < r_0 < 1$, 使得对所有 $r_0 \le r < 1$ 有

$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_r(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} K_r(t)dt < \varepsilon.$$

定理 4 设 K_r 为如上所述一个 $Dirac$ 族。设 f 是分段连续的函数。那么当 $r \to 1$ 时, $K_r * f$ 在每一个连续的紧集上一致收敛于 f.

下面，考虑如下的 $Dirac$ 族的重要例子。我们采用极坐标 (r,θ), 并定义

$$P_r(\theta) = P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}, 0 \le r < 1,$$

我们将证明 P_r 为 Dirac 族，并将其称为 Poisson 族。

通过三角恒等式，我们有

$$P(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2rcos\theta+r^2}.$$

由此，可看出条件 (1) 成立。

注意到

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\theta}d\theta=0,n\neq 0;\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\theta}d\theta=2\pi,n=0.$$

因此，我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta)d\theta=1.$$

因此，条件（ 2 ）成立。

给定 $\delta>0$ 考察

$$\lim_{r\to 1}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=0.$$

注意到对于 $|\theta|\geq\delta>0$, 有不等式

$$\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}\leq\frac{1}{1-2r\cos\delta+r^2}.$$

因此,

$$\lim_{r\to 1}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=0.$$

条件 (3) 成立。

那么，我们有

定理 5 设函数 f 是周期且连续函数。那么当 $r\to 1$ 时， P_r*f 在每一个 f 连续的紧集上一致收敛于 f.

单位圆盘上的调和函数

设 Δ 是 Laplace 算子，它在直角坐标系下为

$$\Delta=(\frac{\partial}{\partial x})^2+(\frac{\partial}{\partial y})^2$$

变换为极坐标为

$$\Delta=(\frac{\partial}{\partial r})^2+\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial}{\partial\theta})^2$$

注意到对于满足 $0 \leq r \leq r_0 < 1$ 的 r 和所有的 θ ， $P(r,\theta)$ 都是一致绝对收敛的。逐项求导后，我们有

$$(\Delta P)(r,\theta) = 0.$$

此外,

$$\frac{d}{dx}\int g(x-t)f(t)dt = \int \frac{d}{dx}g(x-t)f(t)dt$$

满足 $\Delta g = 0$ 的函数称为调和函数。那么，因为 $\Delta(P * f) = (\Delta P * f) = 0$, 所以， $P * f$ 为一调和函数。

考虑如下的圆周上的边界值问题。

假设在中心在原点，半径为 1 的圆周上给定一个连续函数 f , 这样 f 可看作普通的角变量 θ 的函数 $f(\theta)$. 要在圆盘 D 上找一个调和函数，即函数 $F(r,\theta)(0 \leq r < 1)$, 它能连续开拓到闭圆盘并且在边界上取值 $f(\theta)$, 因此对每一个 θ 有

$$\lim_{r\to 1} F(r,\theta) = f(\theta).$$

我们现在可以解决这个问题了。对所有 $\theta \in R$, 假设

$$F(r,\theta) = (P_r * f)(\theta) = P * f(r,\theta).$$

根据上面论述， $F(r,\theta)$ 调和。因此,

$$\lim_{r\to 1} F(r,\theta) = f(\theta).$$