

[文章编号] 1001-246X(2002)01-0023-07

三维不可压 N-S 方程的多重网格求解

袁 礼

(中国科学院数学与系统科学研究院计算数学所,科学与工程计算国家重点实验室,北京 100080)

[摘 要] 应用全近似存储(Full Approximation Storage, FAS)多重网格法和人工压缩性方法求解了三维不可压 Navier-Stokes 方程.在解粗网格差分方程时,对 Neumann 边界条件采用增量形式进行更新,离散方程用对角化形式的近似隐式因子分解格式求解,其中空间无粘项分别用 MUSCL 格式和对称 TVD 格式进行离散.对 90°弯曲的方截面管道流动和 4:1 椭球体层流绕流的数值模拟表明,多重网格的计算时间比单重网格节省一半以上,且无限制函数的 MUSCL 格式比 TVD 格式对流动结构有更好的分辨能力.

[关键词] 不可压 Navier-Stokes 方程;人工压缩性;多重网格法;Neumann 边界条件

[中图分类号] O35 [文献标识码] A

0 引言

三维不可压缩流动的计算模拟至今仍是 CFD 研究中活跃的领域之一,其主要原因是速度场的零散度约束问题使得许多不可压缩流计算方法都需要求解压力 Poisson 方程,而这在一般的三维曲线网格中至今还没有通用有效的解法.在常见的投影法^[1],压力修正法^[2]和人工压缩性法^[3]等方法中,人工压缩性法被认为是计算定常流的有效方法.该方法通过在连续方程中人为地加入压力时间导数项而使主控方程变成时间双曲型,从而可以应用各种可压缩流数值方法来求解.至今已有近似因子分解法^[4,5],线松弛法^[6]和 Runge-Kutta 法^[7]等隐式的和显式的解法,以及中心差分^[4,5],Roe 迎风差分^[6,8],TVD^[9]格式和 WENO^[10]格式等在人工压缩性方法中得到应用.然而,大多数方法在计算粘性流动问题时收敛率都较低,当网格数目增大或网格长宽比增大时问题更加突出.提高收敛率常用的两种方法是预处理法和多重网格法.多重网格法求解一般椭圆型方程可使计算收敛率提高一个数量级^[11],求解 Euler 方程也有较好的收敛效果^[12].但在其它类型问题的应用中如何提高它的收敛率仍需要作进一步研究.近年来多重网格法已被用于改善人工压缩性法的求解收敛性^[14,15].本文研究用多重网格法提高人工压缩性法的收敛率,主要侧重于离散方式为流动变量存

放位置与网格点重合的有限差分法和近似隐式因子分解格式,研究了粗网格上 Neumann 边界条件的迭代技术.通过数值模拟 90°方截面弯管内流和 4:1 椭球体层流分离流,显示了多重网格法可提高人工压缩性法求解定常不可压缩流问题的收敛率,并比较了两种常用的计算格式(基于 Roe 迎风差分的 MUSCL 格式^[8]和 TVD 格式^[9])对不可压缩流流动结构的计算结果.

1 主控方程和数值方法

1.1 主控方程

主控方程为一般曲线坐标系下,加人工压缩性项的三维不可压 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial(\hat{E} - \hat{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial \zeta} = 0, \quad (1)$$

其中

$$\hat{Q} = \frac{Q}{J} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$
$$\hat{E} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \beta U \\ uU + \xi_x p \\ vU + \xi_y p \\ wU + \xi_z p \end{pmatrix},$$

[收稿日期] 2000-05-26; [修回日期] 2001-03-22

[基金项目] 国家重点基础项目(G1999032801)资助项目.

[作者简介] 袁礼(1963-),男,重庆,研究员,博士,从事计算流体力学研究.

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \beta V \\ uV + \eta_x p \\ vV + \eta_y p \\ wV + \eta_z p \end{pmatrix},$$

$$\hat{G} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \beta W \\ uW + \zeta_x p \\ vW + \zeta_y p \\ wW + \zeta_z p \end{pmatrix},$$

τ 为时间, Q 为流动变量, β 为人工压缩性因子, J 为坐标变换的 Jacobi 行列式, U, V 和 W 为逆变速度分量, \hat{E}_ν, \hat{F}_ν 和 \hat{G}_ν 为粘性通量, 参见文[4,6].

1.2 差分格式

为求解方程(1), 本文采用了对角化形式的 Beam-Warming 近似隐式因子分解格式^[5,9]

$$\begin{aligned} & T_\xi [I + h\nabla \Lambda_\xi^+ + h\Delta \Lambda_\xi^- - h\delta_\xi \Gamma_1 \bar{\delta}_\xi] T_\xi^{-1} \cdot \\ & T_\eta [I + h\nabla \Lambda_\eta^+ + h\Delta \Lambda_\eta^- - h\delta_\eta \Gamma_2 \bar{\delta}_\eta] T_\eta^{-1} \cdot \\ & T_\zeta [I + h\nabla \Lambda_\zeta^+ + h\Delta \Lambda_\zeta^- - h\delta_\zeta \Gamma_3 \bar{\delta}_\zeta] T_\zeta^{-1} \Delta Q^n \\ & = -h[(\tilde{E}_{i+1/2} - \tilde{E}_{i-1/2}) + (\tilde{F}_{j+1/2} - \tilde{F}_{j-1/2}) + \\ & (\tilde{G}_{k+1/2} - \tilde{G}_{k-1/2}) - \delta_\xi \hat{E}_\nu - \delta_\eta \hat{F}_\nu - \delta_\zeta \hat{G}_\nu]^n \\ & \equiv -hR^n. \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $h = \Delta\tau J$, I 为单位矩阵, ∇, Δ 和 $\delta_\xi (\bar{\delta}_\xi)$ 分别为后差, 前差和(半点)中心差分算子, $\Gamma_1 = \nu \nabla \xi \cdot \nabla \xi / J$, $\Gamma_2 = \nu \nabla \eta \cdot \nabla \eta / J$ 和 $\Gamma_3 = \nu \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta / J$ 为粘性项的正交部分, 其中 ν 为运动粘性系数, T_ξ^{-1}, T_ξ 和 Λ_ξ 分别为无粘通量雅可比矩阵 $A = \partial \hat{E} / \partial Q$ 的左, 右特征矩阵和特征值组成的对角矩阵^[5], $\Lambda_\xi^\pm = (\Lambda_\xi \pm |\Lambda_\xi|) / 2$. 本文对左端无粘项采用一阶迎风差分逼近, 目的是为了得到三对角线性方程组, 右端无粘项采用 Roe 格式或 TVD 格式来逼近. 在 Roe 格式中, 单元界面的数值通量可由 Roe 的近似 Riemann 算子构造^[8]

$$\tilde{E}_{i+1/2} = \hat{E}_{i+1/2} (Q_{i+1/2}^L) + \bar{A}_{i+1/2}^- (\bar{Q}_{i+1/2}) \cdot (Q_{i+1/2}^R - Q_{i+1/2}^L). \quad (3)$$

式中 $\bar{A}^- = T_\xi \Lambda_\xi^- T_\xi^{-1}$ 由 Roe 平均值 \bar{Q} 计算. 对不可压缩流, $\bar{Q}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (Q_{i+1/2}^R + Q_{i+1/2}^L)$. 单元界面左右侧的流动变量由 Van Leer 的 MUSCL 公式^[16]算出

$$Q_{i+1/2}^L = Q_i + \left\{ \frac{s}{4} [(1 - \kappa s) \nabla + (1 + \kappa s) \Delta] Q \right\}_i, \quad (4)$$

$$Q_{i+1/2}^R = Q_{i+1} - \left\{ \frac{s}{4} [(1 - \kappa s) \Delta + (1 + \kappa s) \nabla] Q \right\}_{i+1}. \quad (5)$$

式中 $s = (2\nabla \Delta + \epsilon) / (\nabla^2 + \Delta^2 + \epsilon)$ 为限制函数, ϵ 为

一小正常数, 一般取为计算舍入精度, 例如 10^{-6} . 对不可压缩流情况, 可令 $s = 1$. 本文取 $\kappa = 1/3$, 对应于三阶精度(线性情况)迎风偏斜差分. 对于左(右)边界点之外的 $\nabla Q (\Delta Q)$, 有对称边界时用对称边界条件求出, 无对称边界时用线性外推求出.

本文所用的 TVD 格式为 Yee-Roe-Davis 的二阶对称 TVD 格式^[17], 以 ξ 方向为例, 其数值通量为

$$\tilde{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[\hat{E}_i + \hat{E}_{i+1} + \frac{T_{\xi_{i+1/2}} \Phi_{i+1/2}}{J_{i+1/2}} \right]. \quad (6)$$

$\Phi_{i+1/2}$ 的第 l 个元素为

$$\begin{aligned} (\phi_{i+1/2}^l)^{\text{sym}} &= -\lambda (\lambda_{i+1/2}^l)^2 s_{i+1/2}^l - \\ & \phi (\lambda_{i+1/2}^l) (\alpha_{i+1/2}^l - s_{i+1/2}^l), \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\lambda = \Delta\tau / \Delta\xi$, $\alpha_{i+1/2}^l$ 为 $\alpha_{i+1/2} = T_{\xi_{i+1/2}}^{-1} (Q_{i+1} - Q_i)$ 的分量, $s_{i+1/2}^l$ 为限制函数, 本文取

$$\begin{aligned} s_{i+1/2}^l &= \text{minmod} \left[2\alpha_{i-1/2}^l, 2\alpha_{i+1/2}^l, 2\alpha_{i+3/2}^l, \right. \\ & \left. 0.5(\alpha_{i-1/2}^l + \alpha_{i+3/2}^l) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

$\phi(z)$ 为熵修正函数, 对不可压缩流情况可取 $\phi(z) = |z|$. 限制函数在左右边界点附近分别修改为 $s_{i-1/2}^l = s_{i+1/2}^l$ 和 $s_{i+1/2}^l = s_{i-1/2}^l$.

1.3 多重网格方法

多重网格法即迭代在几层粗细不同的网格上进行, 用细网格阻尼高频误差, 用粗网格阻尼细网格上的低频误差. 对不同问题用不同策略. 如, 由网格分布是否各向同性, 选用全粗化或半粗化网格; 由不同方程或流动类型用不同类型的限制(restriction)算子和延拓(prolongation)算子. 一般地说, 用多重网格法求解具有均匀尺度的椭圆型问题收敛性最佳, 而求解各向异性问题, 如对流性占主导的流动问题, 收敛性就差. 本文所用多重网格法是求解非线性方程的 FAS 算法, 与文[12]的多重网格法类似之处是都用全粗化网格, V 循环, 三线性插值(延拓)算子, 且都采用 ADI 格式作光滑化算子. 不同之处在于:

第一, 流动变量由细网格向粗网格传递的限制算子为简单的注入(injection), 因为粗细网格的流动变量位置重合, 且数值实验发现简单的注入与体积加权平均几乎无差别; 残差的限制算子应采用有限差分离散时细网格残差的标准加权平均算子, 而不能用有限体积法离散时细网格残差的简单求和; 第二, 粗网格方程进行迭代求解时需要更新 Neumann 型边界上的流动变量值. 通常采用显式边界条件处理. 有如下三种方式可供选择

$$Q_b^{s+1} = Q_b^s + \Delta Q_b^s, \quad (9)$$

$$Q_b^{s+1} = Q_b^s, \quad (10)$$

$$Q_b^{s+1} = f(Q_{interior}^{s+1}). \quad (11)$$

式中, 上标“s”为粗网格方程迭代次数, 下标“b”为边界. 本文研究发现, 直接利用 Neumann 条件(11)来更新边界值将得不到收敛解; 不更新边界值, 即用(10)式往往导致较低的收敛率, 更好的方法是用增量形式(9)来更新边界值. 其中 ΔQ_b^s 由线性化 Neumann 边界条件算出, 例如, $\Delta p^s|_{k=1} = \Delta p^s|_{k=2}$ 即由 $\partial p / \partial \zeta = 0$ 导出. 后面的算例将显示这一修正的效果.

1.4 边界条件

所有边界条件均采用显式处理. 壁面用无滑移条件, 压力由法向梯度为零得到. 远场边界的流动变量值用垂直于边界的一维特征条件算出. 椭球的前后轴奇性用离开此轴半个网格的网格布置加以避免, 并利用对称条件. 方截面管道入口条件为给定解析的速度剖面^[18], 出口速度用外推获得, 出口压力给定为零.

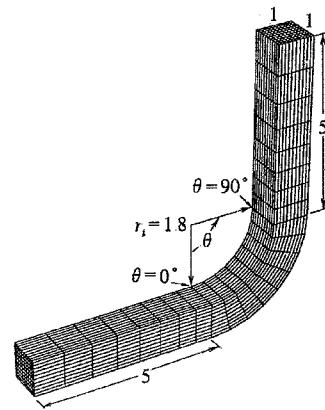
2 结果与讨论

计算了 90° 方截面弯管内流和 4:1 椭球体绕流, 几何尺寸和网格示意图分别见图 1(a)、(b), 流态均为层流. 人工压缩性因子 β 取为 1, CFL 数为 2.5 ~ 20. 全流场中还需设定最大时间步长由数值试验确定. 这是因为三维 ADI 格式有条件稳定性和近似因子分解的分解误差限制了时间步长的上限.

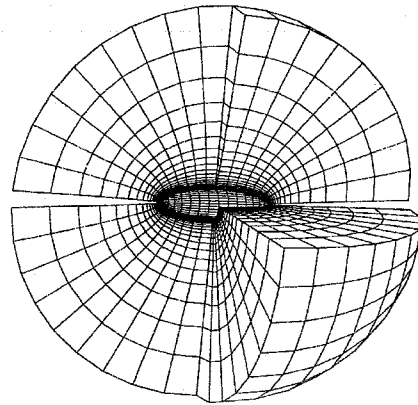
2.1 90° 方截面弯管流动

算例对应于 Humphrey 等人的实验^[13], 以横截面边长和入口平均速度无量纲化的 Re 数为 790. 为研究网格收敛性, 用 $49 \times 33 \times 33$, $73 \times 49 \times 49$ 和 $121 \times 65 \times 65$ 三种数目的网格. 图 2 给出用与不用(9)式处理 Neumann 边界条件的计算收敛史, 其中纵坐标的残差为(2)式右端项中的 R 在所有内点的均方根值以其初始值正则化后的结果. 可见用公式(9)更新粗网格的边界值, 收敛性较好; 不更新粗网格的边界值, 对 TVD 格式残差下降变慢, 对 MUSCL 格式计算逐渐发散; 而直接采用流动变量本身的 Neumann 条件时, 对 TVD 格式残差停滞, 对 MUSCL 格式计算很快就发散.

图 3 给出了多重网格和单重网格, 以及不同网格数目的计算收敛性比较. 可见网格数增加总是使收敛减慢, 其中单重网格的收敛减慢尤甚, 而多重网格的收敛率下降不多. 三重 V 循环每循环一步的计



(a) 90° bending square duct



(b) 4:1 prolate spheroid

图 1 算例的几何尺寸和网格示意图

Fig. 1 Geometries and sketch grids of two test flows used

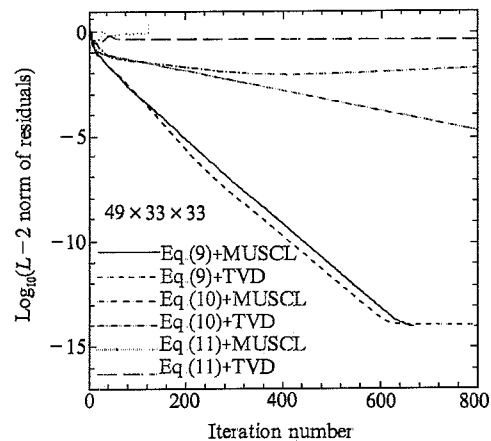


图 2 粗网格上用不同的 Neumann 边界条件处理方法时多重网格计算的收敛史比较

Fig. 2 Comparison of the convergence histories using different Neumann BC treatments on coarse grids

算量约为单重网格每推进一步计算量的 2 倍, 按照残差下降 6 个量级的收敛标准, 用最细网格计算时

多重网格相对于单重网格求解的总体计算效率仍提高了 5 倍(MUSCL)和 4 倍多(TVD),所以在大规模计算中多重网格法有明显的优点.

图 4 给出了对称面上流向速度剖面计算值和实验值^[13]比较.在弯头的第 1 个站位,两种格式计算值之间,以及计算值和实验值之间符合较好,但在随

后的 3 个站位上,计算值与实验值有差异.应该指出,前人的计算结果^[10,14]和实验相比也有类似差别.

图 5(a)给出了用 MUSCL 格式和 TVD 格式计算的速度等值线比较,可见 MUSCL 结果显示更清楚的绕卷结构,而 TVD 结果的相应部分被耗散掉.图 5(b)的横截面速度矢量图表明该站位处除了靠

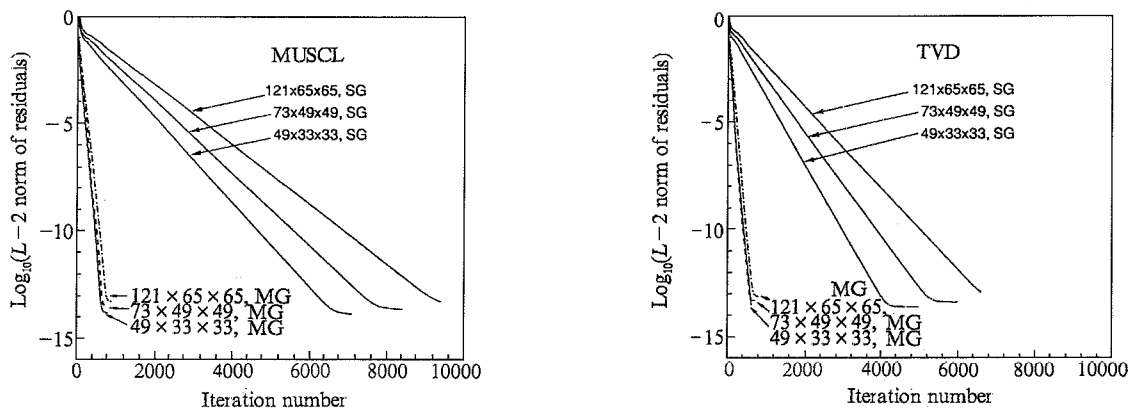


图 3 用三重网格(MG)与单重网格(SG)计算弯管流动的收敛史比较

Fig. 3 The convergence history of three-level multigrid (MG) and single grid (SG) computations for the flow through 90° bending square duct on different grids

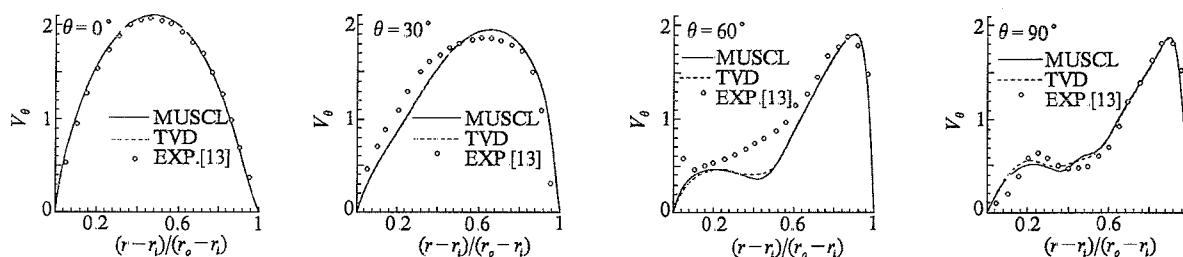


图 4 在对称面内流向速度剖面计算值与实验值的比较,计算网格为 121 × 65 × 65

Fig. 4 Comparison of computed streamwise velocity profiles at different streamwise locations with the experimental results

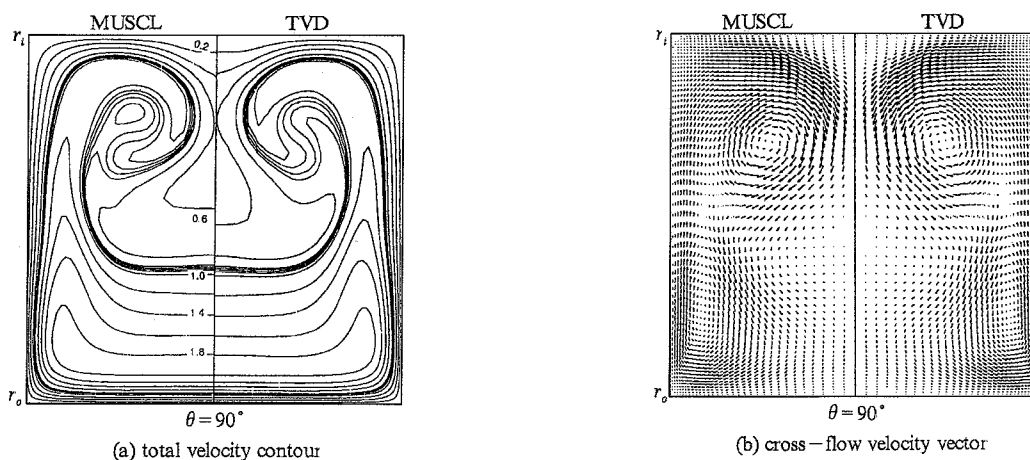


图 5 用 MUSCL 和 TVD 格式计算的速度等值线分布和横截面速度矢量图的比较

Fig. 5 Comparisons of the total velocity magnitude contours and the cross-sectional velocity vectors at the plane of $\theta = 90^\circ$ between MUSCL and TVD results

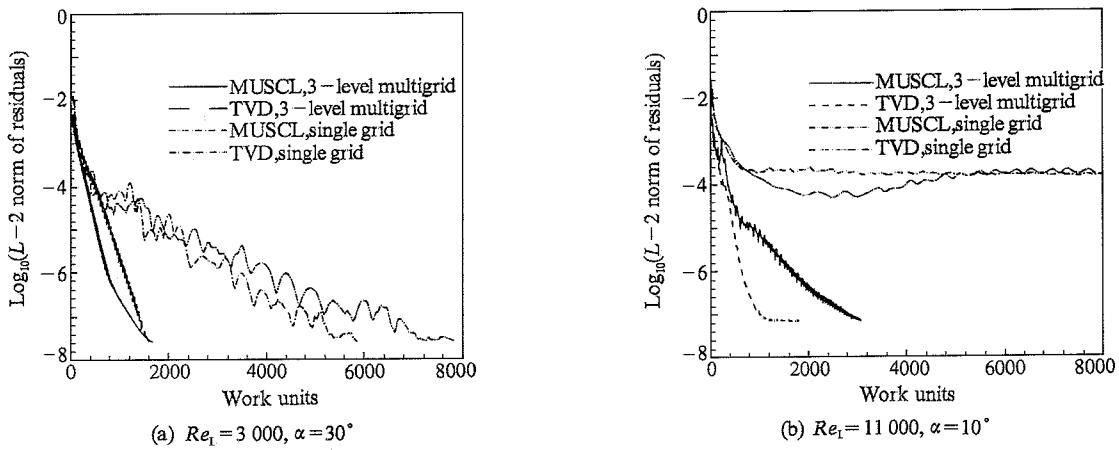


图 6 椭球绕流的计算收敛史, 计算网格为 $81 \times 81 \times 65$

Fig. 6 The convergence history for the flow past a 4:1 prolate spheroid on $81 \times 81 \times 65$ grid

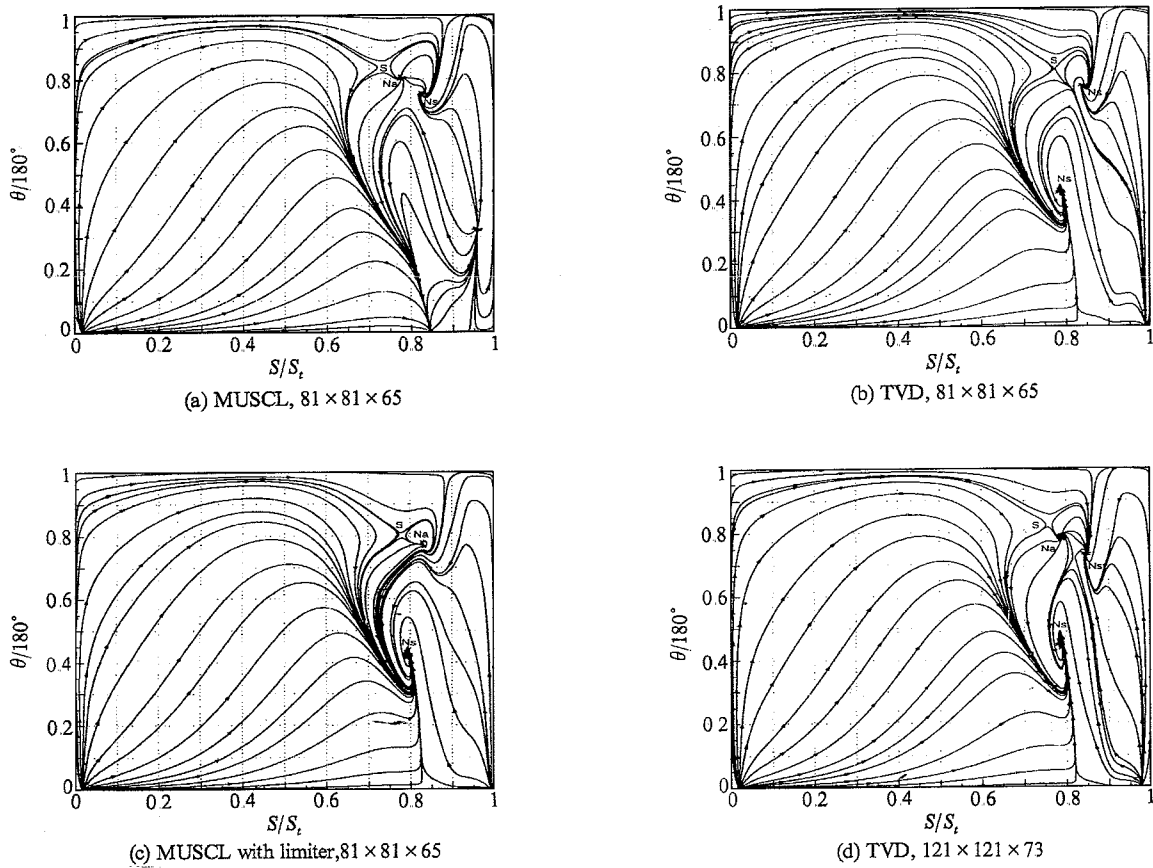


图 7 展开的椭球表面上的极限流线, $Re_1 = 11000, \alpha = 10^\circ$. 横坐标中 S 代表沿椭球纵向的表面弧长, S_1 为总弧长, 纵坐标中 $\theta = 0^\circ$ 代表迎风面, $\theta = 180^\circ$ 代表背风面

Fig. 7 The limiting streamlines on the unwrapped spheroid surface, $Re_1 = 11000, \alpha = 10^\circ$. S represents the surface arclength in longitudinal direction, S_1 the total arclength, $\theta = 0^\circ$ the windward symmetry while $\theta = 180^\circ$ is the leeward symmetry

近内侧壁 (r_i) 的大旋涡外, 靠近外侧壁 (r_o) 还有较小的旋涡形成, 这与实验观察一致。

2.2 4:1 椭球体绕流

椭球体绕流是研究三维分离流动结构的典

例^[19]. 这里只计算长细比为 4:1 的孤立椭球, 计算包括两种情况: $Re_1 = U_\infty L/\nu = 3000, \alpha = 30^\circ$ 和 $Re_1 = 11000, \alpha = 10^\circ$, 两种情况计算上都能得到定常流。

图 6 所示是多重网格和单重网格计算的残差-

计算量曲线的比较,图中横轴的单位为 MUSCL 格式单重网格计算的迭代步数.从图 6(a)可见,使残差下降到 10^{-7} ,用 MUSCL 和 TVD 格式的多重网格计算时间比各自的单重网格计算时间分别节省了约 75%和 80%.图 6(b)表明用单重网格计算 $Re_1 = 11\,000, \alpha = 10^\circ$ 情况,残差只能下降 3~4 个量级,而用多重网格法残差能下降到机器的舍入误差范围.

图 7 比较了 MUSCL 和 TVD 格式所算出的表面流态.从图 7(a)、(b)可见,用两种格式所算出的分离区流动细节有差别,例如,用 MUSCL 格式可算出靠近背风侧分离鞍点 S 后的再附结点 Na ,而用 TVD 格式就得不到,此外,用 MUSCL 格式算出的分离线迎风侧无分离结点,而用 TVD 格式就有分离结点 Ns .如果 MUSCL 格式也用限制函数,则算出的流动结构(图 7(c))与 TVD 格式的结构(图 7(b))类似.用 TVD 格式计算当网格数增加到 $121 \times 121 \times 73$ 时(图 7(d)),背风侧的 S - Na - Ns 结构与图 7(a)类似.所以可以认为造成分离区内流动结构差别的主要原因是限制函数降低了精度.整个模拟结果表明无限制函数的 MUSCL 格式尽管其收敛性比 TVD 格式的差,但对流场结构有较好的分辨度.

3 结论

研究了用多重网格法提高人工压缩性方法计算收敛率的技术.结果表明用有限差分离散时,粗网格 Neumann 边界的流动变量值应采用增量形式进行更新,才能使多重网格法发挥作用.用简单的 V 循环算法可以使 ADI 格式的计算效率提高 1 倍以上.比较了无限制函数的 MUSCL 格式和有限制函数的 TVD 格式的计算结果,表明不用限制函数的格式对旋涡的分辨能力较好.

[参 考 文 献]

- [1] Chorin A. Numerical Solution of the Navier-Stokes equations [J]. Math Comput, 1968, **22**:745 - 762.
- [2] Patanker S. Numerical heat transfer and fluid flow [M]. Washington D C: Hemisphere, 1980.
- [3] Chorin A. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems [J]. J Comput Phys, 1967, **2**:12 - 26.
- [4] Kwak D, et al. An incompressible Navier-Stokes flow solver in three-dimensional curvilinear coordinate systems using primitive variables [R]. AIAA Paper 84 - 0253, 1984.
- [5] Rogers S, Chang J, Kwak D. A diagonal algorithm for the method of pseudocompressibility [J]. J Comput Phys, 1987, **73**:364 - 379.
- [6] Rogers S, Kwak D. Upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations [J]. AIAA J, 1990, **28**:253 - 262.
- [7] Merkle C, Athavale M. Time-accurate unsteady incompressible flow algorithms based on artificial compressibility [R]. AIAA Paper 87 - 1137, 1987.
- [8] Briley W, Neerarambam S, Whitfield D. Implicit lower-upper/approximate-factorization schemes for incompressible flows [J]. J Comput Phys, 1996, **128**:32 - 42.
- [9] 袁礼, 忻鼎定. 三角翼的双襟翼控涡作用的数值模拟研究 [J]. 力学学报, 2000, **32**(2):151 - 158.
- [10] Yang J, et al. Implicit weighted ENO schemes for the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations [J]. J Comput Phys, 1998, **146**:464 - 487.
- [11] Hanckbusch W. Multi-grid methods and applications [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [12] Jameson A, Yoon S. Multigrid solution of the Euler equations using implicit schemes [J]. AIAA J, 1986, **24**:1737 - 1743.
- [13] Humphrey, et al. Laminar flow in a square duct of strong curvature [J]. J Fluid Mech, 1977, **83**, part 2:509 - 527.
- [14] Drikakis D, Iliev O, Assileva D. A nonlinear multigrid method for the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations [J]. J Comput Phys, 1988, **146**:301 - 321.
- [15] Sheng C, Taylor L, Whitfield D. Multigrid algorithm for three-dimensional incompressible high-Reynolds number turbulent flows [J]. AIAA J, 1995, **33**:2073 - 2079.
- [16] Anderson W, Thomas L, Van Leer B. A comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations [R]. AIAA Paper 85 - 0122, 1985.
- [17] Yee H. A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods [R]. NASA TM 101088, 1989.
- [18] White F. Viscous fluid flow [M]. New York: McGraw-Hill, 1974. 123.
- [19] Dallmann U, et al. Flow field diagnostics: topological flow changes and spatio-temporal flow structure [R]. AIAA 95 - 0791, 1995.

MULTIGRID SOLUTIONS FOR THE THREE-DIMENSIONAL INCOMPRESSIBLE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN ARTIFICIAL COMPRESSIBILITY FORMULATION

YUAN Li

*(Institute of Computational Mathematics and LSEC, Academy of Mathematics and System Sciences,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China)*

[Abstract] The full-approximation-storage(FAS) multigrid algorithm is applied in conjunction with the artificial compressibility method to accelerate steady solutions of the 3D incompressible Navier-Stokes equations. Neumann boundary conditions in terms of the solution correction are implemented on the coarse grid when solving the coarse grid equations. The basic scheme used is the diagonalized approximate factorization scheme, and the spatial difference for inviscid fluxes adopts both MUSCL scheme and symmetric TVD scheme respectively for comparing. The performance of the present method is studied for the entry flow through a 90° bent square duct and the flow past an inclined prolate spheroid with an axes ratio of 4:1. It is found that the proposed multigrid method can save the computing time by at least half, and that MUSCL scheme is slightly better than TVD scheme in resolving the flow structures.

[Key words] incompressible Navier-Stokes equations; artificial compressibility; multigrid method; Neumann boundary condition