

DOI: 10.19527/j.cnki.2096-1642.1182

# 输运概率密度函数方法在模拟一维 Burgers 湍流中的应用

王逸泽<sup>1,2</sup>, 袁礼<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院数学与系统科学研究院计算数学所数学科学全国重点实验室, 北京 100190;  
2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

## A Transported PDF Method Applied to Modeling One-Dimensional Burgers Turbulence

WANG Yize<sup>1,2</sup>, YUAN Li<sup>1,2</sup>

(1. SKLMS, ICMSEC, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;  
2. School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**摘要:** 输运概率密度函数(transported probability density function, TPDF)方法在湍流燃烧模拟中颇受重视,其优势是可以精确处理方程中的非线性化学源项。将这种方法应用于由一维随机 Burgers 方程控制的 Burgers 湍流。首先,从带非线性随机强迫项的一维 Burgers 方程出发推导一个精确的单点速度 PDF 输运方程,并分别用两个模型封闭该方程中的条件对流项和条件扩散项,获得模化 PDF 输运方程。然后分别用基于网格的 Monte Carlo 随机粒子法、原始积分矩法和文章发展的线性积分矩法等 3 种数值解法求解模化 PDF 输运方程。数值实验表明,所发展的输运概率密度函数方法可用于研究 Burgers 湍流的统计特性。3 种数值解法中,线性积分矩法和原始积分矩法均可获得和直接数值模拟相似的结果,且线性积分矩法比原始积分矩法的计算效率更高。Monte Carlo 方法的计算结果在带随机外力项的 Burgers 方程算例中不太理想,这或许和该方法为保持单位网格内颗粒数不变而频繁地增删粒子从而引入数值扰动有关。

**关键词:** Burgers 湍流; PDF 输运方程; 封闭; Monte Carlo 方法; 积分矩类方法

**中图分类号:** O242.1; V211 **文献标志码:** A

**Abstract:** Transported probability density function (TPDF) methods are attractive for modeling turbulent combustion, as the nonlinear chemical reaction terms in the PDF transport equation can be treated exactly. In this paper, a TPDF method was applied to model the Burgers turbulence governed by the one-dimensional Burgers equation with a stochastic external force and random initial data. Firstly, an exact one-point velocity PDF transport equation was derived from the Burgers equation with a nonlinear stochastic external force, and then the conditional advection and diffusion terms were closed by using the respective models so as to obtain the modeled PDF transport equation. Secondly, three numerical methods were employed to solve the modeled PDF transport equation: the mesh-based Lagrangian particle Monte Carlo (MC) method, the original quadrature method of moments (QMOM), and the linear QMOM (LQMOM) developed in this work. The numerical tests show that the present PDF method is suitable for studying statistic properties of Burgers turbulence and the LQMOM and QMOM can yield results comparable to the DNS solution with the LQMOM being more efficient than the QMOM. However, the MC method produces

收稿日期: 2025-06-16; 修回日期: 2025-07-29

基金项目: 国家重点研发计划项目(2024YFA1012500); 国家自然科学基金项目(12071470, 12161141017, 12494543)

第一作者简介: 王逸泽(2000—)男, 博士, 主要研究方向为化学反应流计算方法。E-mail: wangyize@lsec.cc.ac.cn

通信作者简介: 袁礼(1963—)男, 研究员, 主要研究方向为化学反应流计算方法。E-mail: lyuan@lsec.cc.ac.cn

引用格式: 王逸泽, 袁礼. 输运概率密度函数方法在模拟一维 Burgers 湍流中的应用[J]. 气体物理, 2025, 10(6): 54-65.

Citation: WANG Y Z, YUAN L. A transported PDF method applied to modeling one-dimensional Burgers turbulence[J]. Physics of Gases, 2025, 10(6): 54-65.

unsatisfactory results for cases with stochastic forcing terms, which is probably due to numerical perturbations introduced by frequently adding and deleting particles in order to keep the particle number per grid cell unchanged.

**Keywords:** Burgers turbulence; PDF transport equation; closure; Monte Carlo method; quadrature based moment method

## 引 言

Burgers 方程中的非线性项和扩散项可以描述真实流体的对流和耗散机制, 因此, Burgers 方程被广泛用作一个原型模型, 用于研究湍流的各种特性<sup>[1-8]</sup>, 测试湍流模拟的各种模型<sup>[9-16]</sup> 以及验证各种新的数值方法<sup>[17-19]</sup>。

由带随机强迫项和随机初始条件一维 Burgers 方程所控制的 Burgers 湍流, 表现出显著的时空随机脉动特性。Burgers 湍流的统计特性强烈依赖于随机初始条件和随机强迫项的概率分布<sup>[13]</sup>。在特定条件下, Burgers 湍流可模拟可压缩湍流的某些特征, 例如激波、间歇性和能量级串现象。和真实流体湍流研究类似, 大涡模拟(LES)<sup>[9,12,14-15]</sup> 和直接数值模拟(DNS)<sup>[20,14]</sup> 方法已被用于模拟 Burgers 湍流。输运概率密度函数(transported probability density function, TPDF)方法是另一种湍流模拟方法, 很早就被应用于模拟无化学反应湍流<sup>[21-23]</sup> 和有化学反应湍流<sup>[24-27]</sup>。TPDF 方法的主要优势在于: PDF 输运方程中的非线性化学反应源项以封闭形式出现; 与 TPDF 方法联用的 RANS/LES 方程中的平均/滤波化学源项可以精确封闭。TPDF 方法同样适用于带随机强迫项和随机初始条件的 Burgers 方程。在针对 Burgers 湍流的 TPDF 方法中, 解变量(可看作速度)的单点概率密度函数可用于计算平均速度及单点任意阶统计矩(如湍动能等关键物理量)。

近几十年来, Monte Carlo(MC)方法<sup>[28]</sup> 已得到广泛应用。文献[18] 将该方法应用于计算随机 Burgers 方程的路径积分公式。文献[13] 将 MC 方法用于对随机 Burgers 方程的大量间断有限元解进行采样, 并将平均结果与简化的单点及两点概率密度函数方程的间断有限元解进行对比。然而, 文献[13] 中简化单点 PDF 方程的条件扩散项还须通过 MC 方法另行计算, 因此该 PDF 方程并非自洽方程。目前文献中尚未见有 Burgers 湍流的封闭的单点 PDF 输运方程。

除了 PDF 输运方程的建模封闭外, 本文的另一个焦点是 PDF 输运方程的数值解法。一般而言, 由于包含多个内坐标, PDF 输运方程具有高维特性, 因此传统数值方法(如有限差分法和有限体积法)难以适用。传统上广泛使用 Lagrange MC 粒子方法, 通过求

解等效的随机常微分方程来实现 PDF 输运方程的求解<sup>[29-30]</sup>。MC 方法的计算量随 PDF 维度呈线性增长, 统计误差与粒子数量的平方根成反比。为降低统计误差而增加粒子数目, 可能导致计算成本显著上升。另一种随机方法是欧氏随机场(Eulerian stochastic field, ESF)方法。该方法通过对等效于原 PDF 输运方程的随机偏微分方程的样本解进行平均来实现数值求解<sup>[25,31-32]</sup>。然而, ESF 方法需要专门针对随机偏微分方程构造特殊的离散格式, 且其模拟精度普遍逊于 Lagrange MC 粒子方法。

近年来, 以积分矩方法(quadrature based moment method, QBMM)为代表的确定性解法在 PDF 输运方程计算中也逐渐受到重视。QBMM 求解原 PDF 输运方程对应的矩输运方程, 这样就可使用有限差分等传统数值方法求解。QBMM 的核心思想是利用求解出的矩重构近似 PDF 分布(称为矩反演过程), 并将重构出的信息用于计算矩输运方程中的非线性未封闭项。自 Mcgraw<sup>[33]</sup> 首次提出用于描述气溶胶动力学的原始积分矩方法(quadrature method of moments, QMOM)后, 各种形式的积分矩方法得到发展并应用于多种概率密度函数方程: 如分散多相流中的种群平衡方程<sup>[34-35]</sup>、气体动力学方程<sup>[36-37]</sup> 以及湍流燃烧的 PDF 输运方程<sup>[38-41]</sup>。因此, 在将积分矩方法应用于实际问题之前, 在相对简单的一维 Burgers 湍流问题中比较它们与传统的 MC 方法的优劣, 是有意义的。

本文发展一个模拟一维 Burgers 湍流的自封闭 PDF 输运方程, 并评估它的几种数值解法。首先, 从带随机强迫项的一维 Burgers 方程出发推导出单点速度 PDF 输运方程, 其中需要多点信息的条件对流项和条件扩散项分别用梯度模型和平均交换相互作用(interaction by exchange with the mean, IEM)模型<sup>[42-44]</sup> 来封闭。其次, 对作者早先提出的线性积分矩法(linear quadrature method of moments, LQMOM)<sup>[45]</sup> 进行修改, 目的是保证 PDF 重构值的正性。再次, 应用 3 种不同数值方法, 即: 拉氏 MC 方法<sup>[46]</sup>、原始积分矩法<sup>[33]</sup> 和本文发展的线性积分矩法求解所建立的 PDF 输运方程, 并通过带随机初始条件、线性和非线性随机强迫项等不同情况的算例, 将计算结果与计算效率和

直接数值模拟方法进行比较,验证本文发展的PDF输运方程和线性积分矩法在Burgers湍流模拟中的适用性。

## 1 Burgers湍流的输运概率密度函数模型

本章给出PDF输运方程的推导及封闭化模型。

### 1.1 PDF方程的推导

使用细粒度密度函数来推导Burgers湍流的单点速度PDF输运方程。考虑如下带有随机外力项与随机初始条件以及周期边界条件的Burgers方程初边值问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S(u, x, t), \quad -1 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), u(-1, t) = (1, t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中,初值 $u_0(x)$ 和强迫项 $S(u, x, t)$ 均为各自样本空间中具有给定分布的随机场。 $S(u, x, t)$ 除依赖于点 $x$ 和时间 $t$ 外,还可以显式地依赖于解 $u$ 。

细粒度密度函数 $f^*$ 是针对随机解变量 $u(x, t)$ 定义的,可将 $u$ 看作速度。 $f^*$ 的表达式为

$$f^*(v, u(x, t)) = \delta(v - u(x, t)) \quad (2)$$

$v$ 是 $u(x, t)$ 的样本空间。细粒度密度函数有如下性质

$$\langle f^*(v, u(x, t)) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v - v') f(v'; x, t) dv' = f(v; x, t) \quad (3)$$

这里 $\langle \cdot \rangle$ 表示样本空间中的概率平均,而 $f(v; x, t)$ 是随机变量 $u(x, t)$ 的概率密度函数。

对任意随机变量 $Q$ 或随机变量函数 $R(u)$ ,存在如下重要的结论

$$\begin{aligned} \langle Q f^*(v, u(x, t)) \rangle &= \langle Q | u = v \rangle f(v; x, t) \\ \langle R(u) f^*(v, u(x, t)) \rangle &= R(v) f(v; x, t) \end{aligned} \quad (4)$$

接下来推导式(1)中Burgers方程的单点PDF输运方程。采用Pope<sup>[44]</sup>的推导方法,即直接计算物质导数 $\frac{Df^*}{Dt} \equiv \frac{\partial f^*}{\partial t} + u \frac{\partial f^*}{\partial x}$ 的概率平均。为此,首先计算 $f^*$ 的时间和空间导数

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} = \frac{\partial f^*}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f^*}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial x} = \frac{\partial f^*}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial f^*}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6)$$

式(5)+ $u \times$ 式(6)并利用Burgers方程,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial t} + u \frac{\partial f^*}{\partial x} &= -\frac{\partial f^*}{\partial v} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial v} \left( f^* \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^* S(u, x, t) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

其次,对式(7)取概率平均,利用平均算子和关于 $x, t, v$ 导数的可交换性及式(3), (4)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \left\langle u \frac{\partial f^*}{\partial x} \right\rangle &= -\frac{\partial}{\partial v} \left( \left\langle \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} | u = v \right\rangle f \right) - \\ &= \frac{\partial}{\partial v} (S(v, x, t) f) \end{aligned} \quad (8)$$

将式(8)左端第2项改写成守恒项和不含 $\partial f^*/\partial x$ 的项的形式,并利用结论(4),得

$$\left\langle u \frac{\partial f^*}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial (u f^*)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} f^* \right\rangle = \frac{\partial (v f)}{\partial x} - \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} | u = v \right\rangle f \quad (9)$$

式(9)最后一项在流体力学方程中是没有的,但在Burgers方程却存在,因此需要特别的建模处理。

利用关于 $f^*$ 的下述结果(文献[44]中习题12.54)

$$\nabla f^* = -\frac{\partial}{\partial v} (f^* \nabla^2 u) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} (f^* \nabla u \cdot \nabla u)$$

用 $\gamma$ 乘上式并取平均,可将式(8)右端第1项改写为

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial v} \left( \left\langle \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} | u = v \right\rangle f \right) = \\ \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \left\langle \gamma \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} | u = v \right\rangle f \right) \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)右端第1项为发生在物理空间中的扩散,第2项为发生在速度空间中的混合,需要使用混合模型对该项进行建模。

将式(9), (10)代回式(8),得到精确的单点速度PDF输运方程如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (v f)}{\partial x} - \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} | u = v \right\rangle f &= \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \left\langle \gamma \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} | u = v \right\rangle f \right) - \frac{\partial}{\partial v} (S(v, x, t) f) \end{aligned} \quad (11)$$

式中两个条件平均项需要建模来封闭。其中左端的条件平均项是Burgers方程中新出现的,右端的条件平均项与现有湍流燃烧PDF输运方程中的项类似<sup>[24,27,44]</sup>。虽然方程(11)右端的非线性强迫项是封闭的,但由于 $S$ 是随机场,故(11)是随机偏微分方程。

为方便建模,将随机速度 $u$ 分解为平均速度和脉动速度: $u = \langle u \rangle + u'$ ,其中 $\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v f(v) dv$ 。这样,方

程(11)可变形为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(vf)}{\partial x} - \frac{\partial\langle u \rangle}{\partial x} f - \left\langle \frac{\partial u'}{\partial x} |u=v \right\rangle f = \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \left\langle \gamma \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} |u=v \right\rangle f \right) - \frac{\partial}{\partial v} (S(v, x, t) f) \end{aligned} \quad (12)$$

## 1.2 PDF 方程的封闭

方程(12)右端的第2项和湍流燃烧文献[24,27,47]中由条件平均扩散项导出的结果类似,表示由分子扩散和小尺度湍流混合引起的发生在组分空间的混合。可以采用 IEM 微混合模型<sup>[42-43]</sup>建模

$$-\frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \left\langle \gamma \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} |u=v \right\rangle f \right) \approx \frac{\partial}{\partial v} [\Omega_m (v - \langle u \rangle) f] \quad (13)$$

其中,  $\Omega_m$  为混合频率,后面将给出具体表达式。

方程(12)左端的脉动速度梯度条件平均项需要特别处理。对方程(12)乘以  $v$  并在速度空间上积分,利用概率密度函数在边缘处更快趋于0的性质,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial\langle u \rangle}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial\langle u^2 \rangle}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial\langle u^2 \rangle}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial\langle u^2 \rangle}{\partial x} - \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left\langle \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle |u=v \right) f v dv = \gamma \frac{\partial^2\langle u \rangle}{\partial x^2} + \langle S \rangle \end{aligned}$$

和方程(1)相比,不难发现,脉动速度梯度项乘  $v$  的积分项应该等于亚格子应力梯度项

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \left( \left\langle \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle |u=v \right) f v dv = \frac{1}{2} \frac{\partial\langle u \rangle^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial\langle u^2 \rangle}{\partial x}$$

于是提出一个初步的梯度模型

$$-\left\langle \frac{\partial u'}{\partial x} |u=v \right\rangle f = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_{n1} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (14)$$

这里  $\Gamma_{n1} \geq 0$  是依赖于平均速度  $\langle u \rangle$  (可从  $f$  获得)的涡黏性系数。

于是式(12)可写成封闭形式的 PDF 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(vf)}{\partial x} - \frac{\partial\langle u \rangle}{\partial x} f - \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_{n1} \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \\ \frac{\partial}{\partial v} [\Omega_m (v - \langle u \rangle) f] - \frac{\partial}{\partial v} (S(v, x, t) f) \end{aligned} \quad (15)$$

然而,数值测试表明模型方程(15)的数值解总发散。为了克服这个问题,首先将(15)左端的第2项改写成  $\frac{\partial(vf)}{\partial x} = \frac{\partial\langle u \rangle f}{\partial x} + \frac{\partial((v - \langle u \rangle)f)}{\partial x}$ ,然后将原本精确的后一项用近似的梯度模型反向模化:  $\frac{\partial((v - \langle u \rangle)f)}{\partial x}$

$\approx -\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_{n2} \frac{\partial f}{\partial x} \right)$ , 并和式(14)合并,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial((v - \langle u \rangle)f)}{\partial x} - \left\langle \frac{\partial u'}{\partial x} |u=v \right\rangle f \approx \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left( (\Gamma_{n2} + \Gamma_{n1}) \frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_t \frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

其中,  $\Gamma_t = \Gamma_{n1} + \Gamma_{n2}$ 。则本文最终的 PDF 输运方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( (\gamma + \Gamma_t) \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial v} [\Omega_m (v - \langle u \rangle) f] - \frac{\partial}{\partial v} (S(v, x, t) f) \end{aligned} \quad (16)$$

将式(16)乘以  $v^k$  并对  $v$  积分,得矩输运方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_k}{\partial t} + M_1 \frac{\partial M_k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( (\gamma + \Gamma_t) \frac{\partial M_k}{\partial x} \right) + k \Omega_m \times \\ (M_1 M_{k-1} - M_k) + k \int_{-\infty}^{\infty} S(v, x, t) v^{k-1} f dv, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $k$  阶矩  $M_k = \int_{-\infty}^{\infty} v^k f(v) dv$ 。可见左端的对流项不含有高阶矩  $M_{k+1}$ , 而方程(15)对应的矩输运方程则含有此高阶矩,造成矩方程不是严格双曲的。这是 PDF 方程(16)相比于(15)的优点。注意,当外力源项形式为  $S(v, x, t) = S(x, t)$  时,方程(17)右端最后一项变成  $kS(x, t)M_{k-1}$ , 方程封闭,可用古典矩方法求解。

混合频率和湍流涡黏性可用 Smagorinsky 模型计算如下

$$\Omega_m = C_\Omega \frac{\gamma + \Gamma_t}{\Delta^2}, \Gamma_t = (C_s \Delta)^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right| \quad (18)$$

其中,取黏性系数  $\gamma = 8 \times 10^{-5}$ <sup>[14]</sup>, 参数  $C_\Omega = 4$ , Smagorinsky 常数  $C_s = 0.17$ 。滤波宽度  $\Delta$  选为网格尺寸。滤波速度  $\bar{u}$  在 MC 方法中取为系综平均  $\langle u \rangle$ , 在积分矩方法中取为 1 阶矩  $M_1$ 。

## 2 MC 方法和积分矩方法的实施

本章介绍所用的一种 MC 方法<sup>[29]</sup>和两种积分矩方法(原始积分矩法 QMOM<sup>[33]</sup>和线性积分矩法 LQMOM<sup>[45]</sup>)。

### 2.1 MC 方法

采用基于网格的拉氏 MC 颗粒方法<sup>[29,44,46]</sup>求解 PDF 输运方程(16)。MC 颗粒在物理空间运动,其位置和速度用简化的 Langevin 模型确定,该模型类似于不可压缩流中的简化 Langevin 模型<sup>[44,48]</sup>。模型中,第  $n$  个颗粒的位置  $X^{(n)}(t)$  和速度  $u^{(n)}(t)$  用下列随机常

微分方程控制

$$\begin{aligned} dX^{(n)}(t) &= u^{(n)}(t) dt \\ du^{(n)}(t) &= \left[ S(u^{(n)}(t), X^{(n)}(t), t) + \gamma(\nabla^2 u)^* - \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \Omega_m^*(u^{(n)}(t) - \langle u \rangle^*) \right] dt + \sqrt{C_0 k^* \Omega_m^*} dW(t) \end{aligned} \quad (19)$$

其中, 常数  $C_0 = 2.1$ , 湍动能  $k = \frac{1}{2}(\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2)$ 。上标“\*”表示相应的场量是  $t$  时刻从网格点插值到颗粒位置  $X^{(n)}(t)$  处的值。  $dW(t)$  是颗粒的 Wiener 过程, 其为速度增量提供随机扰动。式(19)第2个等号右边的漂移系数和扩散系数是通过比较对应的 Fokker-Planck 方程和 PDF 方程(16)得到的。

求解随机方程(19)采用 1 阶向前 Euler 格式

$$\begin{aligned} X^{(n)}(t_{s+1}) &= X^{(n)}(t_s) + u^{(n)}(t_s) \Delta t \\ u^{(n)}(t_{s+1}) &= u^{(n)}(t_s) + \left[ S(u^{(n)}(t_s), X^{(n)}(t_s), t_s) + \right. \\ &\quad \left. \gamma \left( \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} \right)^* - \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0 \right) \Omega_m^*(u^{(n)}(t_s) - \langle u \rangle^*) \right] \Delta t + \\ &\quad \sqrt{C_0 k^* \Omega_m^* \Delta t} \xi_{s+1}^{(n)} \end{aligned} \quad (20)$$

其中,  $s$  代表时间层,  $\Delta t = t_{s+1} - t_s$  为时间步长,  $\xi_{s+1}^{(n)}$  表示遵循标准 Gauss 分布的随机数。

为了求出式(20)中带“\*”的量, 须首先求出系综平均  $\langle u \rangle$  和  $\langle u^2 \rangle$  在网格点处的近似。设网格点  $x_j$  的采样体积  $\Delta V_j = [x_{j-1}, x_{j+1}]$  内有  $N_E$  个颗粒, 这些颗粒的信息将收集到点  $x_j$  处。设  $\Delta x$  为均匀的网格步长。利用如下的帐篷函数估算网格点处的系综平均

$$B_j(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - x_j|}{\Delta x}, & |x - x_j| < \Delta x \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

网格点  $x_j$  处的系综  $\langle u \rangle$  和  $\langle u^2 \rangle$  由采样体积  $\Delta V_j$  内的颗粒信息的加权平均来估计

$$\langle u \rangle_j = \frac{\sum_{n_j=1}^{N_E} B_j(X^{(n_j)}) u^{(n_j)}}{\sum_{n_j=1}^{N_E} B_j(X^{(n_j)})}, \quad \langle u^2 \rangle_j = \frac{\sum_{n_j=1}^{N_E} B_j(X^{(n_j)}) (u^{(n_j)})^2}{\sum_{n_j=1}^{N_E} B_j(X^{(n_j)})} \quad (22)$$

于是, 网格点处的湍动能计算如下

$$k_j = \frac{1}{2}(\langle u^2 \rangle_j - \langle u \rangle_j^2) \quad (23)$$

待所有网格点处的  $\langle u \rangle_j$  求出后, 可采用中心差分格式逼近网格点处的梯度和 2 阶导数

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \right)_j &\approx \frac{\langle u \rangle_{j+1} - \langle u \rangle_{j-1}}{2\Delta x} \\ \left( \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} \right)_j &\approx \frac{\langle u \rangle_{j-1} - 2\langle u \rangle_j + \langle u \rangle_{j+1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (24)$$

网格点处的混合频率  $(\Omega_m)_j$  可结合式(18)和(24)的第 1 式计算, 且在式(18)中置  $\tilde{u} = \langle u \rangle, \Delta = \Delta x$ 。

最后, 格式(20)所需的  $\langle u \rangle^*, \nabla^2 \langle u \rangle^*, k^*, \Omega_m^*$  采用 5 阶 Lagrange 插值公式从网格点插值到颗粒位置  $X^{(n)}(t)$  处。对于  $k^*$  和  $\Omega_m^*$ , 如 5 阶插值结果为负, 就改用线性插值以保证其正性。

## 2.2 原始积分矩法和线性积分矩法

在原始积分矩法 (QMOM)<sup>[33,47]</sup> 中, PDF 用 Dirac  $\delta$  函数的加权和近似

$$f(v; x, t) = \sum_{j=1}^{N_q} w_j(x, t) \delta(v - v_j(x, t)) \quad (25)$$

其中,  $w_j$  是权,  $v_j$  是样本空间中的横标点,  $N_q$  是积分点数目。用式(25)可将矩输运方程(17)中的积分项表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^{k-1} S(v) f(v) dv = \sum_{j=1}^{N_q} w_j v_j^{k-1} S(v_j) \quad (26)$$

这意味着非线性源项的封闭转移到权和横标点的计算上。用式(25)也可将矩表示为

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} v^k f(v) dv = \sum_{j=1}^{N_q} w_j v_j^k \quad (27)$$

在每个时刻和网格点, 用求解矩输运方程(17)所得  $2N_q$  个矩  $(M_0, M_1, \dots, M_{2N_q-1})$  代入式(27), 得到一个关于权  $w_j$  和横标点  $v_j, j = 1, 2, \dots, N_q$  的非线性代数方程组。此方程组的求解过程称为矩逆过程。对单变量 PDF, 可采用乘积-差分算法<sup>[33,49]</sup> 或 Wheeler 算法<sup>[50-51]</sup> 求解。本文采用乘积-差分算法求解。

近期我们提出了线性积分矩法 (LQMOM)<sup>[45]</sup>。该方法不用 Dirac  $\delta$  函数近似 PDF, 只假定 PDF 和强迫力函数  $S$  关于  $v$  是光滑的, 于是可用传统数值积分法则逼近矩定义和矩输运方程中的源积分项。对于一维样本空间  $v \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ , 有

$$M_k = \int_a^b v^k f(v) dv \approx \sum_{j=1}^{N_L} \omega_j v_j^k f_j \quad (28)$$

$$\int_a^b v^{k-1} S(v) f(v) dv \approx \sum_{j=1}^{N_L} \omega_j v_j^{k-1} S(v_j) f_j \quad (29)$$

其中,  $v_j$  和  $\omega_j$  是样本空间中  $N_L - 1$  个预设积分点和权重,  $f_j = f(v_j)$  为 PDF 在积分点处的取值。特别地, 当  $f(v)$  是  $N_L - 1$  次多项式时, 式(28)是精确的。

以积分点数  $N_L = 4$  为例, 可将式(28)写为线性方程组

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_1 v_1 & \omega_2 v_2 & \omega_3 v_3 & \omega_4 v_4 \\ \omega_1 v_1^2 & \omega_2 v_2^2 & \omega_3 v_3^2 & \omega_4 v_4^2 \\ \omega_1 v_1^3 & \omega_2 v_2^3 & \omega_3 v_3^3 & \omega_4 v_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

对于  $N_L$  个积分点, 须求解  $N_L$  个矩输运方程(17)以提供式(30)中的右端项。求解规模为  $N_L$  的线性方程组(30)的计算代价远低于求解相同规模的非线性方程组(27)。

本文修复了 LQMOM<sup>[45]</sup> 在 PDF 分布为陡峭或不连续时可能产生负 PDF 值的问题。具体修正步骤如下: 对于方程组(30)的临时解  $f_1, f_2, \dots, f_{N_L}$ , 按照  $i = 1, 2, \dots, N_L$  的次序逐一检测每个元素  $f_i$  是否存在  $f_i < 0$  的情况。若无, 就检测下一个; 若有, 就对全部元素进行修正。修正时, 将检测为负的元素  $f_i$  调整为 0 (新值记为  $F_i = 0$ ), 其他所有元素  $f_k$  则按式(31)调整为新值  $F_k$

$$F_k = f_k \cdot \frac{M_0}{\sum_{j=1}^{N_L} \omega_j f_j - \omega_i f_i}, k = 1, 2, \dots, N_L, k \neq i \quad (31)$$

随后执行赋值操作: 将  $F_k \rightarrow f_k (k = 1, 2, \dots, N_L)$ , 并转入后续序号  $i$  元素的检测。以上流程至多经过  $N_L$  步即可终止。

式(31)表明除当前元素  $f_i$  被调整为 0 外, 其他所有元素  $f_k$  通过一个正因子  $\alpha = M_0 / \left( \sum_{j=1}^{N_L} \omega_j f_j - \omega_i f_i \right) \leq 1$  进行缩放, 因此  $F_k$  与  $f_k$  的正负性保持一致, 且由于

$$\sum_{k=1}^{N_L} \omega_k F_k = \omega_i \cdot 0 + \sum_{k=1, k \neq i}^{N_L} \omega_k (\alpha f_k) = \alpha \left( \sum_{j=1}^{N_L} \omega_j f_j - \omega_i f_i \right) = M_0$$

修正的解  $F_1, F_2, \dots, F_{N_L}$  能保持 0 阶矩  $M_0$  不变。

### 3 数值结果

在本章中, 将给出针对 Burgers 方程的 3 种不同强迫源项形式的数值算例。采用 QBMM 求解矩输运方程(17)时, 对流项使用 5 阶 WENO-MZ 有限差分格式<sup>[52]</sup>, 扩散项采用 2 阶中心差分格式, 时间推进采用 3 阶 TVD-Runge-Kutta 方法<sup>[53-54]</sup>, 其中混合项和源积分项采用显式处理。矩输运方程中的源积分项计算利用式(26)或(29)。计算参数设置为: 时间步长  $\Delta t = 10^{-4}$ , 网格尺寸  $\Delta x = 10^{-3}$ ; QMOM 采用  $N_q = 2$  个积分节点, LQMOM 根据经验在  $v \in [0.8, 1.2]$  区间内预设  $N_L = 8$  个 Gauss 点。基于网格的 MC 方法同样采用上述  $\Delta t$  和  $\Delta x$  值, 每个网格单元采样颗粒数  $N_E = 20$ 。为获得参考解, 对 Burgers 方程问题(1)进行直接数值模拟(DNS), 采用与 QBMM 相同的数值格式,  $\Delta t_{\text{DNS}} = 10^{-4}$ ,  $\Delta x_{\text{DNS}} = 2.5 \times 10^{-4}$ 。所有算例的计算域均为  $[-1, 1]$ , 区域两端采用周期性边界条件。为保证相容性, 给定的初始条件应满足周期性要求。

#### 3.1 随机初始条件引起的衰减 Burgers 湍流

首先, 研究具有随机初始条件的衰减 Burgers 湍流。方程(1)中的强迫项  $S(u, x, t) = 0$ 。初始条件由叠加在单位速度上的  $n$  个正弦波组成

$$u(x, 0) = \sum_{i=1}^N (2E_0(k_i))^{1/2} \sin(k_i \pi x + \beta_i) + 1 \quad (32)$$

其在两个边界处具有周期性。模拟湍动能谱的初始能谱  $E_0(k)$  在 Fourier 空间  $k$  中给定, 本文采用初始能谱<sup>[14]</sup>

$$E_0(k) = \begin{cases} A 5^{-\frac{5}{3}}, & 1 \leq k \leq 5 \\ A k^{-\frac{5}{3}}, & k > 5 \end{cases} \quad (33)$$

$k_i$  取为 1~1280 的整数, 且  $N = 1280$ 。对于每个  $k_i$ , 速度  $u$  具有一个均匀随机相位角  $\beta_i \in [-\pi, \pi]$ 。  $A$  为常数, 其值通过设定湍流强度  $u'/\bar{u} = 0.7\%$  确定, 其中

$$u' = \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2 / N}, \bar{u} = 1.$$

对于  $t > 0$ , 瞬时湍能谱计算如下

$$E(k, t) = \frac{1}{L} \left| \int_{-1}^1 u'(x, t) e^{-ikx} dx \right|^2 \quad (34)$$

这里脉动速度  $u'(x, t) = u(x, t) - \langle u \rangle(t)$ , 算子  $\langle \cdot \rangle$  表示空间平均。  $L = 2$  为求解域长度。

计算从  $t = 0$  开始进行至终止时间  $t_{\text{end}} = 0.05$  (此

时解仍是光滑的<sup>[14]</sup>)。图1给出用直接数值模拟(DNS)、MC法、原始积分矩法(QMOM)及线性积分矩法(LQMOM)计算的湍能谱。图中,无量纲波数 $k$ 的定义为<sup>[19]</sup>:  $k = \hat{k}L/(2\pi)$ ,  $\hat{k}$ 为式(34)中的有量纲物理波数,  $L$ 为求解域长度。可见,所有方法的结果在高波数区均小于初始能谱 $E_0(k)$ ,而在低波数区与之高度吻合。MC法的结果在高波数区呈现出低耗散特性,这可能是该方法属于低耗散的Lagrange方法,且粒子速度更新计算中的Wiener过程增强了湍流强度所致。QMOM与LQMOM的计算结果彼此接近,且在波数范围 $k < 100$ 内与DNS计算结果高度一致。

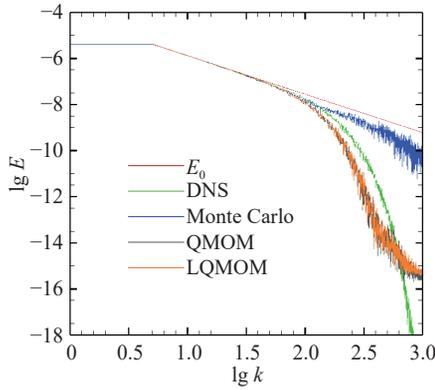


图1 随机初值式(32)下的衰减 Burgers 湍流问题用 DNS, MC, QMOM, LQMOM 计算的湍流能谱的比较  
( $t_{\text{end}} = 0.05$ )

Fig. 1 Comparison of turbulent energy spectrums at time  $t_{\text{end}} = 0.05$  among DNS, Monte Carlo, QMOM and LQMOM for the decaying Burgers turbulence with the random initial condition (32)

### 3.2 时间白噪声驱动的随机 Burgers 方程

考虑文献[19,55-57]研究过的随机力驱动 Burgers 方程问题。方程(1)中的源项采用加性强迫项,具体表达式为<sup>[19,58]</sup>

$$S(u, x, t) = S(x, t) = \frac{A}{\sqrt{\Delta t}} \sum_{n=1}^{N_c} \frac{Z_n(t)}{\sqrt{\pi n}} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (35)$$

其中,  $A$  表示波动幅值, 采用 Manzanero-Torrico 等<sup>[59]</sup> 设定的值  $A = 0.04$ 。该源项由  $N_c$  个谐波模态叠加而成, 谐波振幅  $Z_n(t)/\sqrt{\pi n}$  中的  $Z_n(t)$  服从标准正态分布。计算域长度  $L = 2$ , 模态数目  $N_c = 80$ 。

初始条件设为满足周期性边界条件的  $u(x, 0) = 1$ 。计算终止时间取  $t_{\text{end}} = 600$ <sup>[58]</sup>。由于源项幅值  $A = 0.04$  较小, 解始终保持正值, 且其平均值始终维持在  $u = 1$  附近。

图2显示了几种方法计算的湍流能谱的对比。湍能谱依据方程(34)计算, 并参照文献[58]的做法对  $t = 200 \sim 600$  时段进行了时间平均。从图2可见, 本文 LQMOM 在波数范围  $\lg k < 1.5$  内与直接数值模拟(DNS)符合良好, 但在高波数区域表现出更强的耗散特性。QMOM 在低波数区的能谱值低于 LQMOM, 这或许是因为仅采用两个积分节点 ( $N_q = 2$ ), 导致近似精度不足。MC 方法在低波数区预测出偏高的值, 原因在于受强迫力作用, 采样体积内粒子数频繁出现极端情况(数目过少或过多), 须持续进行粒子增删操作, 这些操作可能在低波数区引入过量扰动。值得注意的是, 所有模拟结果在  $\lg k = \lg N_c \approx 1.9$  处均出现显著陡降。该临界点对应着湍流运动主导机制的分界: 当波数  $k < N_c$  时, 湍流运动主要受强迫项(35)的影响; 而在  $k > N_c$  的高波数域, 湍流演化过程则由 Burgers 方程本身主导。

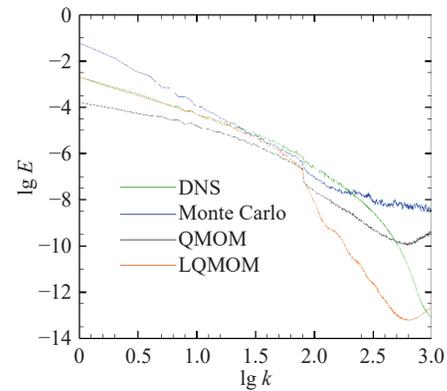
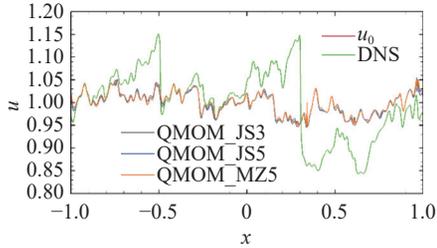


图2 用 DNS, Monte Carlo, QMOM 和 LQMOM 计算源项式(35)驱动下 Burgers 湍流问题所得的时间平均湍能谱的比较

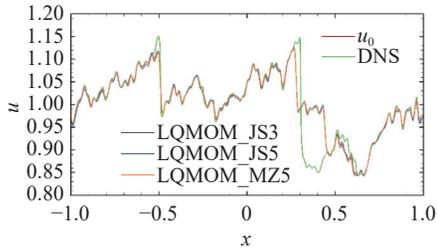
Fig. 2 Comparison of time-averaged turbulent energy spectrums among DNS, Monte Carlo, QMOM and LQMOM for the forced Burgers turbulence with the source (35)

图3对比了两种搭配不同 WENO 格式<sup>[60,52]</sup> 的积分矩方法和直接数值模拟方法的最终时刻的解剖面, 其中, JS3/JS5 指 3 阶/5 阶 WENO-JS 格式。从图3(a)可见, QMOM 和不同 WENO 格式搭配的结果虽彼此差别不大, 但与 DNS 结果存在显著偏差。因 MC 方法计算的解  $\langle u \rangle$  剖面 and DNS 结果的相位差异显著, 故未予展示。图3(b)表明, 和 3 种 WENO 格式搭配的 LQMOM 结果与 DNS 结果比较符合, 仅在  $x \approx -0.5$  和  $x \approx 0.3$  局部位置出现较大差别, 这主要归因于这两点附近有激波形成。这说明当有强激波时, 本文的梯度扩散项模型可能无法完全捕捉真实的激波结构。

图 4 为 4 种不同混合频率模型参数的 LQMOM 和 DNS 结果在  $t = 400$  时的解分布对比图。可以看出当模型参数  $C_\Omega = 1, 4, 8$  时 LQMOM 解都能很好地符合 DNS 解, 只在  $C_\Omega = 16$  有较大偏差。这和文献中关于该参数在 2 ~ 5 范围内对计算结果影响小的结论一致。



(a) DNS vs. QMOM,  $t=600$



(b) DNS vs. LQMOM,  $t=600$

图 3 源项(35)驱动下 Burgers 湍流问题<sup>[60]</sup>  $t_{\text{end}} = 600$  时刻解和两种积分矩方法解的比较

Fig. 3 Comparison between the solution snapshots with DNS and two QBMMs for the forced Burgers turbulence with the source (35) at time  $t_{\text{end}} = 600$

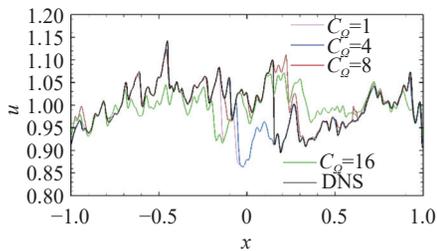
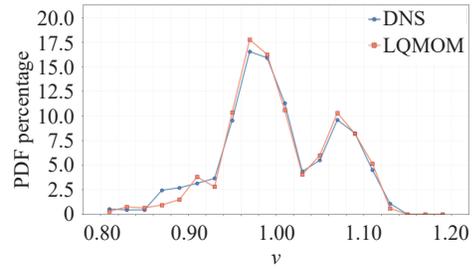


图 4 不同混合频率模型参数  $C_\Omega$  下 LQMOM 解和 DNS 解的比较,  $t = 400$ , 源项(35)驱动下 Burgers 湍流问题

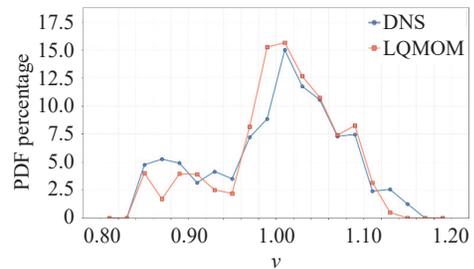
Fig. 4 Comparison of the solution snapshots at  $t = 400$  between LQMOM using different model parameters  $C_\Omega$  and DNS for the forced Burgers turbulence with the source (35)

图 5 给出  $t = 550, 600$  的 DNS 和 LQMOM 的 PDF 结果。其中, 图 5(a) 比较的是  $x = 0$  点处的 PDF 结果, 图 5(b) 比较的是最终时刻的空间平均的 PDF 结果。DNS 结果是将速度实际达到的区间  $v \in [0.8, 1.2]$  分为 20 个小段, 统计  $x = 0$  点在时间范围  $t \in [540, 560]$

内落入每小段的时间步数占全部时间步数的百分比, 或  $t = 600$  时刻在空间范围  $x \in [-1, 1]$  内落入每小段的网格点数占全部网格点数的百分比作为 PDF, 画在每小段中点。可以看出, 无论是单点单时间 PDF 还是单时间空间平均 PDF, LQMOM 和 DNS 的计算结果都符合较好, 验证了输运 PDF 方法对驱动源项有较好的捕捉能力。



(a) PDF at  $x=0$ ,  $t=550$



(b) Domain-averaged PDF at  $t=600$

图 5 源项(35)驱动下的 Burgers 湍流问题的 DNS 和 LQMOM 计算的 PDF 分布和计算域平均 PDF 分布的比较  
Fig. 5 Comparison of PDF distributions at one point and averaged over the domain computed by LQMOM and DNS for the forced Burgers turbulence with the source (35)

### 3.3 非线性随机力驱动的 Burgers 方程

计算带有非线性随机强迫项的 Burgers 方程, 该强迫项显式地依赖于速度  $u$ , 且具有时间白噪声特性

$$S(u, x, t) = \frac{Au(2-u)}{\sqrt{\Delta t}} \sum_{n=1}^{N_c} \frac{Z_n(t)}{\sqrt{\pi n}} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (36)$$

其中, 系数  $A = 0.04$ ;  $Z_n(t)$  为标准正态分布, 用于在时间维度上引入随机过程;  $N_c = 80$ ; 初始条件与式(32)及式(33)相同, 模拟终止时间为  $t_{\text{end}} = 0.05$ 。

图 6 对比了不同方法计算的  $t_{\text{end}} = 0.05$  时刻的湍能谱。可以看出, QMOM 和 LQMOM 的结果与 DNS 在高波数范围内符合良好, 而 MC 方法的结果与 DNS 存在明显偏差。值得注意的是, 所有数值结果在波数范围  $\lg k = \lg N_c \approx 1.9$  内均表现出大的波动性, 这可能源于驱动源项中  $n \leq N_c$  的低波数模态的影响。

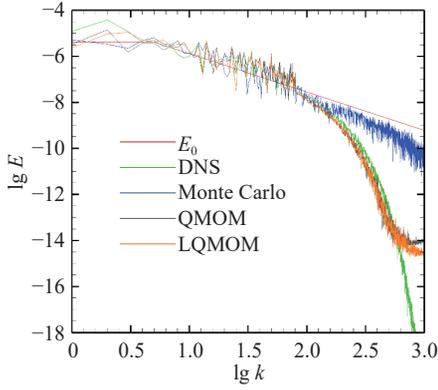


图6 用DNS, Monte Carlo, QMOM 和LQMOM 计算非线性源项(36)驱动下 Burgers 湍流问题于  $t_{\text{end}} = 0.05$  瞬时的湍能谱比较

Fig. 6 Comparison of turbulent energy spectrums among DNS, Monte Carlo, QMOM and LQMOM for the Burgers turbulence with the nonlinear source (36) at the time  $t_{\text{end}} = 0.05$

图7 对比了DNS 和LQMOM 计算的最终时刻的空间平均PDF。从结果可看出LQMOM 对源项(36)的捕捉能力较好。

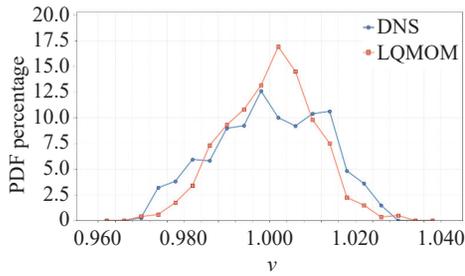


图7 非线性源项(36)驱动下 Burgers 湍流问题的DNS 和LQMOM 获得的空间平均PDF 分布的比较( $t_{\text{end}} = 0.05$ )

Fig. 7 Comparison of PDF snapshots at  $t_{\text{end}} = 0.05$  obtained by LQMOM and DNS for the forced Burgers turbulence with the source (36)

图8 给出了不同网格尺度下的能谱图以显示网格收敛性。可以看出在网格点数为1000时结果较粗糙,当网格达到2000以后,大部分波数区内各网格数上的结果差别不大,只在高频区有差异,可以认为是收敛的。

最后,表1列出了不同数值方法从  $t = 0$  计算至  $t = 0.05$  的CPU 时间比较。其中DNS 采用了细网格  $\Delta x = 2.5 \times 10^{-4}$ , 而MC 方法和两种积分矩方法则都使用较粗的网格  $\Delta x = 10^{-3}$ , 各方法的时间步长满足CFL 数约为0.25。从结果可以看出,LQMOM 的计算时间要少于QMOM 和DNS。DNS 需要在密网格上求解单个输运方程,而采用8个积分节点的LQMOM

和采用2个积分节点的QMOM 分别需要在粗网格上求解8个和4个矩输运方程。所有方法均在单计算节点上用OpenMP 共享内存并行实现,但本文中MC 颗粒方法实施的并行效率较低,导致MC 法的计算速度慢于其他方法。

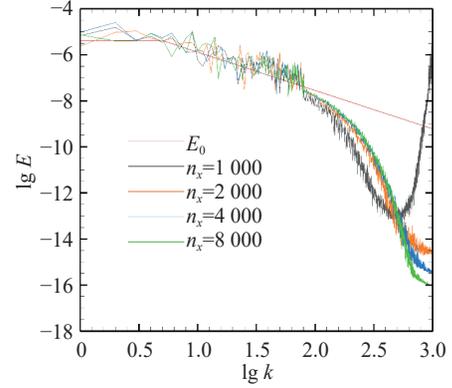


图8 非线性源项(36)驱动下 Burgers 湍流问题的LQMOM 在不同计算网格数上计算的  $t_{\text{end}} = 0.05$  时刻的湍动能谱比较

Fig. 8 Comparison of turbulent energy spectrums at time  $t_{\text{end}} = 0.05$  among different mesh resolutions computed by LQMOM for the Burgers turbulence with the nonlinear source (36)

表1 不同方法对带非线性源项(36)的 Burgers 方程从  $t = 0$  推进到  $t = 0.05$  的CPU 时间

Table 1 CPU times by different methods for the Burgers equation with the nonlinear source term (36) from  $t = 0$  to  $t = 0.05$  unit: s

LQMOM	QMOM	DNS	Monte Carlo
15.460	18.984	27.920	31.523

注:  $N_{x,\text{DNS}} = 8000$ ,  $N_{x,\text{QBMM}} = N_{x,\text{MC}} = 2000$ ,  $\Delta t_{\text{DNS}} = 1.0 \times 10^{-4}$ ,  $\Delta t_{\text{QBMM}} = \Delta t_{\text{MC}} = 4 \times 10^{-4}$ 。

## 4 结论

我们发展了一种输运概率密度函数方法,用于模拟由随机强迫项和随机初始数据驱动的一维 Burgers 湍流。首先推导了一维 Burgers 方程的精确单点单时间速度PDF 的输运方程,随后采用两种模型对方程中的条件对流项和扩散项加以封闭。所得的模化PDF 输运方程的优势在于其对应的矩输运方程是严格双曲的。接下来,采用Lagrange MC 粒子法、原始积分矩法以及本文的线性积分矩法对模化PDF 方程进行数值求解。针对几个 Burgers 湍流问题的数值模拟结果表明,所发展的输运概率密度函数方法可应用于研究含随机驱动力的 Burgers 方程解的统计

特性; 相较于 QMOM 和 MC 粒子法, 本文的 LQMOM 计算精度和效率更优。

本文的 TPDF 方法还有一些不完善之处, 例如对强激波的模拟结果不令人满意。今后将进一步开展封闭模型的改进工作。

**致谢** 本文的计算在中国科学院数学科学国家重点实验室的高性能计算机上完成。

#### 参考文献 (References)

- [ 1 ] BURGERS J M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1948, 1: 171-199.
- [ 2 ] BURGERS J M. On the emergence of patterns of order[J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1963, 69(1): 1-25.
- [ 3 ] KIDA S. Asymptotic properties of Burgers turbulence[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1979, 93(2): 337-377.
- [ 4 ] GOTOH T, KRAICHNAN R H. Statistics of decaying Burgers turbulence[J]. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1993, 5(2): 445-457.
- [ 5 ] AVELLANEDA M, WEINAN E. Statistical properties of shocks in Burgers turbulence[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1995, 172(1): 13-38.
- [ 6 ] GURBATOV S N, SIMDYANKIN S I, AURELL E, et al. On the decay of Burgers turbulence[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, 344: 339-374.
- [ 7 ] BAHRAMINASAB A, NIRY M D, DAVOUDI J, et al. Taylor's frozen-flow hypothesis in Burgers turbulence [J]. *Physical Review E*, 2008, 77(6): 065302.
- [ 8 ] MENON G, SRINIVASAN R. Kinetic theory and Lax equations for shock clustering and Burgers turbulence[J]. *Journal of Statistical Physics*, 2010, 140(6): 1195-1223.
- [ 9 ] LOVE M D. Subgrid modelling studies with Burgers' equation[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, 100(1): 87-110.
- [ 10 ] DAKHOUL Y M, BEDFORD K W. Improved averaging method for turbulent flow simulation. Part I: theoretical development and application to Burgers' transport equation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1986, 6(2): 49-64.
- [ 11 ] DAS A, MOSER R D. Optimal large-eddy simulation of forced Burgers equation[J]. *Physics of Fluids*, 2002, 14(12): 4344-4351.
- [ 12 ] BASU S. Can the dynamic eddy-viscosity class of subgrid-scale models capture inertial-range properties of Burgers turbulence?[J]. *Journal of Turbulence*, 2009, 10: N12.
- [ 13 ] CHO H, VENTURI D, KARNIADAKIS G E. Statistical analysis and simulation of random shocks in stochastic Burgers equation[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2014, 470(2171): 20140080.
- [ 14 ] LI Y N, WANG Z J. A priori and a posteriori evaluations of sub-grid scale models for the Burgers' equation[J]. *Computers & Fluids*, 2016, 139: 92-104.
- [ 15 ] MAULIK R, SAN O. Explicit and implicit LES closures for Burgers turbulence[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, 327: 12-40.
- [ 16 ] AMANI E, AHMADPOUR A, AGHAJARI M J. Dynamic subgrid-scale LES model for turbulent non-Newtonian flows: a priori and a posteriori analyses of Burgers turbulence[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2021, 295: 104615.
- [ 17 ] FLETCHER C A J. Computational techniques for fluid dynamics 1: fundamental and general techniques[M]. Berlin: Springer, 1991.
- [ 18 ] DÜBEN P, HOMEIER D, JANSEN K, et al. Monte Carlo simulations of the randomly forced Burgers equation[J]. *Europhysics Letters EPL*, 2008, 84(4): 40002.
- [ 19 ] SOLÁN-FUSTERO P, NAVAS-MONTILLA A, FERRER E, et al. Application of approximate dispersion-diffusion analyses to under-resolved Burgers turbulence using high resolution WENO and UWC schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2021, 435: 110246.
- [ 20 ] GOTOH T. Probability density functions in steady-state Burgers turbulence[J]. *Physics of Fluids*, 1999, 11(8): 2143-2148.
- [ 21 ] KOLLMANN W. The PDF approach to turbulent flow[J]. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1990, 1(5): 249-285.
- [ 22 ] DOPAZO C. Recent developments in PDF methods[A]//LIBBY P A, WILLIAMS F A. *Turbulent Reacting Flows*[M]. London: Academic Press, 1994: 375-474.
- [ 23 ] HEINZ S. *Statistical mechanics of turbulent flows*[M]. Berlin: Springer, 2003.
- [ 24 ] POPE S B. *A Monte Carlo method for the PDF*

- equations of turbulent reactive flow[J]. *Combustion Science and Technology*, 1981, 25(5/6): 159-174.
- [25] VALIÑO L. A field Monte Carlo formulation for calculating the probability density function of a single scalar in a turbulent flow[J]. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1998, 60(2): 157-172.
- [26] JABERI F A, COLUCCI P J, JAMES S, et al. Filtered mass density function for large-eddy simulation of turbulent reacting flows[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, 401: 85-121.
- [27] GIVI P. Filtered density function for subgrid scale modeling of turbulent combustion[J]. *AIAA Journal*, 2006, 44(1): 16-23.
- [28] HAMMERSLEY J M, HANDSCOMB D C. Monte Carlo methods[M]. London: Methuen Press, 1964.
- [29] POPE S B. PDF methods for turbulent reactive flows[J]. *Progress in Energy and Combustion Science*, 1985, 11(2): 119-192.
- [30] POPE S B. Lagrangian PDF methods for turbulent flows[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1994, 26: 23-63.
- [31] WANG F, LIU R, DOU L, et al. A dual timescale model for micro-mixing and its application in LES-TPDF simulations of turbulent nonpremixed flames[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2019, 32(4): 875-887.
- [32] XU S J, ZHONG S H, ZHANG F, et al. On element mass conservation in Eulerian stochastic fields modeling of turbulent combustion[J]. *Combustion and Flame*, 2022, 239: 111577.
- [33] MCGRAW R. Description of aerosol dynamics by the quadrature method of moments[J]. *Aerosol Science and Technology*, 1997, 27(2): 255-265.
- [34] MARCHISIO D L, PIKTURNA J T, FOX R O, et al. Quadrature method of moments for population-balance equations[J]. *AIChE Journal*, 2003, 49(5): 1266-1276.
- [35] YUAN C, LAURENT F, FOX R O. An extended quadrature method of moments for population balance equations[J]. *Journal of Aerosol Science*, 2012, 51: 1-23.
- [36] YUAN C, FOX R O. Conditional quadrature method of moments for kinetic equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(22): 8216-8246.
- [37] TAUNAY P C, MUELLER M E. Quadrature-based moment methods for kinetic plasma simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2023, 473: 111700.
- [38] RAMAN V, PITSCH H, FOX R O. Eulerian transported probability density function sub-filter model for large-eddy simulations of turbulent combustion[J]. *Combustion Theory and Modelling*, 2006, 10(3): 439-458.
- [39] DONDE P, KOO H, RAMAN V. A multivariate quadrature based moment method for LES based modeling of supersonic combustion[J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, 231(17): 5805-5821.
- [40] SALENBAUCH S, CUOCI A, FRASSOLDATI A, et al. Modeling soot formation in premixed flames using an extended conditional quadrature method of moments[J]. *Combustion and Flame*, 2015, 162(6): 2529-2543.
- [41] MADADI-KANDJANI E. Quadrature-based models for multiphase and turbulent reacting flows[D]. Ames: Iowa State University, 2017.
- [42] DOPAZO C, O'BRIEN E E. An approach to the autoignition of a turbulent mixture[J]. *Acta Astronautica*, 1974, 1(9/10): 1239-1266.
- [43] VILLERMAUX J, FALK L. A generalized mixing model for initial contacting of reactive fluids[J]. *Chemical Engineering Science*, 1994, 49(24): 5127-5140.
- [44] POPE S B. *Turbulent flows*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [45] WANG Y C, WANG Y Z, YUAN L. Linear quadrature method of moments for solving the transported probability density function model for turbulent combustion[J]. *Combustion Theory and Modelling*, 2025, 29(2): 145-176.
- [46] MCDERMOTT R, POPE S B. A particle formulation for treating differential diffusion in filtered density function methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 226(1): 947-993.
- [47] FOX R O. *Computational models for turbulent reacting flows*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [48] MOKHTARPOOR R, TURKERI H, MURADOGLU M. A new robust consistent hybrid finite-volume/particle method for solving the PDF model equations of turbulent reactive flows[J]. *Computers & Fluids*, 2014, 105(10): 39-57.
- [49] GORDON R G. Error bounds in equilibrium statistical mechanics[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1968, 9(5): 655-663.
- [50] SACK R A, DONOVAN A F. An algorithm for

- Gaussian quadrature given modified moments[J]. *Numerische Mathematik*, 1971, 18(5): 465-478.
- [ 51 ] WHEELER J C. Modified moments and Gaussian quadratures[J]. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1974, 4(2): 287-296.
- [ 52 ] WANG Y Z, ZHAO K L, YUAN L. A modified fifth-order WENO-Z scheme based on the weights of the reformulated adaptive order WENO scheme[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2024, 96(10): 1631-1652.
- [ 53 ] GOTTLIEB S, SHU C W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes[J]. *Mathematics of Computation*, 1998, 67(221): 73-85.
- [ 54 ] GOTTLIEB S, SHU C W, TADMOR E. Strong stability-preserving high-order time discretization methods[J]. *SIAM Review*, 2001, 43(1): 89-112.
- [ 55 ] BEC J, KHANIN K. Burgers turbulence[J]. *Physics Reports*, 2007, 447(1/2): 1-66.
- [ 56 ] CHEKHLOV A, YAKHOT V. Kolmogorov turbulence in a random-force-driven Burgers equation[J]. *Physical Review E*, 1995, 51(4): R2739-R2742.
- [ 57 ] ZIKANOV O, THESS A, GRAUER R. Statistics of turbulence in a generalized random-force-driven Burgers equation[J]. *Physics of Fluids*, 1997, 9(5): 1362-1367.
- [ 58 ] MOURA R, SHERWIN S J, PEIRÓ J. Linear dispersion-diffusion analysis and its application to under-resolved turbulence simulations using discontinuous Galerkin spectral/*hp* methods [J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, 298: 695-710.
- [ 59 ] MANZANERO-TORRICO J. Dispersion-diffusion analysis for variable coefficient advection problems, with application to alternative DG formulations and under-resolved turbulence[D]. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, 2016.
- [ 60 ] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126(1): 202-228.