

文章编号: 2096-1642(2016)06-0022-14

一种基于 AUSM 分裂的真正多维 HLL 格式

胡立军, 袁礼

(中国科学院数学与系统科学研究院计算数学所, 科学与工程计算国家重点实验室, 北京 100190)

A Genuinely Multidimensional HLL Riemann Solver Based on AUSM Splitting

HU Li-jun, YUAN Li

(LSEC, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

摘要: 文章给出了一种真正多维的 HLL Riemann 解算器. 采用 AUSM 分裂将通量分解成为对流通量和压力通量, 其中对流通量的计算采用迎风格式, 压力通量的计算采用 HLL 格式, 且将 HLL 格式的耗散项中的密度差用压力差代替, 从而使得格式能够分辨接触间断. 为了实现数值格式真正多维的特性, 分别计算了网格界面中点和角点上的数值通量, 并且采用 Simpson 公式加权组合中点和角点上的数值通量得到网格界面的数值通量. 为了减少重构角点处状态时的模板宽度, 计算中采用基于 SDWLS 梯度的线性重构获得 2 阶空间精度, 而时间离散采用 2 阶保强稳 Runge-Kutta 方法. 数值实验表明, 相比于传统的一维 HLL 格式, 文章的真正多维 HLL 格式具有能够分辨接触间断, 以及更大的时间步长等优点. 与其他能够分辨接触间断的格式(例如 HLLC 格式)不同, 真正多维的 HLL 格式在计算二维问题时不会出现激波不稳定现象.

关键词: Euler 方程; 真正多维 HLL 格式; AUSM 分裂; 角点通量; 捕捉接触间断; SDWLS 梯度重构

中图分类号: O354; O241.82

文献标识码: A

Abstract: A genuinely multidimensional HLL Riemann solver was given. The flux vector of the Euler equations was split into convection and pressure parts. The convection part was evaluated by using the upwind scheme and the pressure part was evaluated by using a modified HLL scheme. In the modified HLL scheme, the pressure difference was replaced by density difference in the dissipative term in order to capture the contact accurately. In order to obtain the genuinely multidimensional property, the numerical fluxes at the midpoint and the two corners of the cell interface were evaluated respectively, and the Simpson rule was used to obtain the final numerical flux through the interface. The linear reconstruction using SDWLS gradients was used for second order spatial accuracy, and the time derivative was discretized using the second order strong stability preserving Runge-Kutta method. Compared with the traditional one dimensional HLL scheme, the genuinely multidimensional HLL scheme can capture the contact discontinuity, and can use larger time step. Unlike other schemes which can capture the contact discontinuity accurately such as the HLLC scheme, the genuinely multidimensional HLL scheme eliminates the phenomena of numerical shock instability in 2D cases.

Key words: Euler equation; genuinely multidimensional HLL; AUSM splitting; corner flux; contact capturing; SDWLS gradient reconstruction

引言

在过去几十年中, Euler 方程的数值方法研究取得了长足的进步, 出现了许多计算方法, 这些方法主要可以分成两类: 通量差分裂方法(FDS)和通量分裂方法(FVS). 其中, 通量差分裂方法是基于

对两个相邻状态之间的局部 Riemann 问题求精确解或者近似解. 一些著名的近似 Riemann 解算器包括 Roe^[1], HLL(Harten, Lax and Van Leer)^[2]和 HLLC(Harten, Lax and Van Leer with contact)^[3]等. 其中两波近似的 HLL 近似 Riemann 解算器在计算一维和多维问题时非常高效和健壮, 但是不能分辨

收稿日期: 2016-08-10; 修回日期: 2016-08-22

基金项目: 国家 973 计划资助项目(2010CB731505); 国家自然科学基金资助项目(11261160486, 11321061)

引用格式: 胡立军, 袁礼. 一种基于 AUSM 分裂的真正多维 HLL 格式[J]. 气体物理, 2016, 1(6): 22-35.

Citation: Hu L J, Yuan L. A genuinely multidimensional HLL Riemann solver based on AUSM splitting[J]. Physics of Gases, 2016, 1(6): 22-35.

接触间断,该格式的使用大大受到了限制.全间断波近似的 Roe 格式和三波近似的 HLLC 格式由于简单高效并能够分辨接触间断等优点被广泛使用.但是使用它们计算多维问题时,会产生一些非物理现象,包括膨胀激波、负内能、红斑(carbuncle)、双 Mach 杆和奇偶失联等现象.

在通量分裂方法中,传统的 Steger-Warming 格式^[4]和 Van Leer 格式^[5-8]形式简单且能够捕捉与非线性波对应的间断,但不能精确地捕捉与线性波相对应的间断,因此在计算接触间断和剪切波时会产生错误的耗散.为了结合通量差分裂方法和通量分裂方法的各自优点,Liou 等^[9]提出了一种能够分辨接触间断波的通量分裂格式(advection upstream splitting method, AUSM 格式),并且将其不断改进,发展成不同版本的 AUSM 格式^[10-12]. AUSM 格式在理论上能区分流动特征中的线性场和非线性场,并且将通量分裂为对流项与压力项.由于对间断有高分辨率以及较高的计算效率,AUSM 格式在计算流体力学中得到了广泛应用.类似 AUSM 格式的通量分裂格式还有 Zha-Bilgen 格式^[13]和最近出现的 TV 格式^[14]等.然而这些能够分辨接触间断的分裂格式在计算多维问题时也多少会遇到数值激波不稳定现象.

传统的 Riemann 解算器在计算时把网格界面的间断分解成一维的波系结构,这种处理方法带来的问题是:一维通量仅仅考虑了沿着网格界面法向传播的信息,而忽略了沿着网格界面横向传播的信息,这会导致格式分辨率和稳定性的降低^[15],使计算多维问题时允许使用的 Courant 数大大减小.因此构造真正多维的 Riemann 解算器就成为热门的研究问题.其中,早期尝试包括 Collela^[15]的角点输运迎风格式,Billet 等^[16]的加权平均通量格式,LeVeque^[17]针对多维守恒律系统设计的波传播算法,Fey^[18-19]和 Brio 等^[20]基于线性化的 Roe 格式开发的真正多维 Riemann 解算器,以及 Wendroff^[21]的多维 HLL 解算器等.由于这些格式形式复杂、实施困难、计算代价大却得不到完全令人满意的计算结果,它们在计算流体力学中未能得到广泛的应用.

最近,Balsara^[22]提出的 Euler 方程的真正多维 HLL Riemann 解算器具有简单的数值通量公式,不仅容易编程而且具有较高的计算效率.其核心思想是在网格界面的角点处求解真正的多维 Riemann 问题.受到 Balsara 的启发,一批研究人员对真正多维的 HLL 格式不断探讨和改进,包括 Capdeville^[23]提

出的高阶多维 HLL 格式,Vides 等^[24]提出的适合于一般双曲守恒系统的简单多维 HLL 格式,Mandal 等^[25]提出的基于对流压力分裂通量的真正多维 HLL 解算器.在文献[26]中 Balsara 对传统的一维 HLLC 格式进行推广,发展了二维 Euler 方程和磁流体力学方程的真正多维的 HLLC 格式,后来又真正多维 HLL 格式应用到三维非结构网格中^[27].

本文给出了一种基于 AUSM 分裂的真正多维 HLL Riemann 解算器(命名为 GM-HLL-A 格式).采用 AUSM 分裂方法将通量分裂为对流通量和压力通量.这和 Mandal 等^[25]采用的 Zha-Bilgen 分裂方法^[13]稍有不同.本文分别计算网格界面中点和角点处的对流通量和压力通量.其中对流通量的计算使用简单的迎风格式;压力通量的计算使用修改的 HLL 格式,即将 HLL 格式的耗散项中的密度差用压力差代替,从而克服了传统的一维 HLL 格式不能捕捉接触间断的缺点.

本文结构如下:第 1 部分介绍控制方程组以及 AUSM 分裂通量,第 2 部分介绍网格界面中点和角点处数值通量的计算格式,第 3 部分介绍空间的 2 阶精度重构方法和时间离散格式,第 4 部分给出一些一维和二维数值算例的结果和分析,第 5 部分为结论.

1 控制方程组

1.1 二维 Euler 方程组

考虑二维 Euler 方程组

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

其中, \mathbf{U} 为守恒变量, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 和 $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ 分别为 x 方向和 y 方向的通量,具体为

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v u \\ v(E + p) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中, ρ 为密度, p 为压力, u 和 v 分别为 x 方向和 y 方向的速度,总能量

$$E = \rho \left[e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right].$$

对于理想气体,内能

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}.$$

其中, $\gamma=1.4$ 为比热比.

式(1)的有限体积方法可以表示成

$$U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}j} - F_{i-\frac{1}{2}j}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{ij+\frac{1}{2}} - G_{ij-\frac{1}{2}}).$$

其中, $F_{i+\frac{1}{2}j}$ 和 $G_{ij+\frac{1}{2}}$ 分别为 x 和 y 方向的数值通量.

1.2 AUSM 分裂

采用 AUSM 分裂方法^[9] 将通量分裂为对流通量和压力通量.

$$F_1(U) = u \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ (E+p) \end{bmatrix}, \quad F_2(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$G_1(U) = v \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ (E+p) \end{bmatrix}, \quad G_2(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

其中, F_1 和 G_1 为对流通量, F_2 和 G_2 为压力通量.

2 真正多维的 GM-HLL-A 格式

2.1 界面中点通量和角点通量

考虑直角网格上的二维 Euler 方程, 其网格划分如图 1 所示.

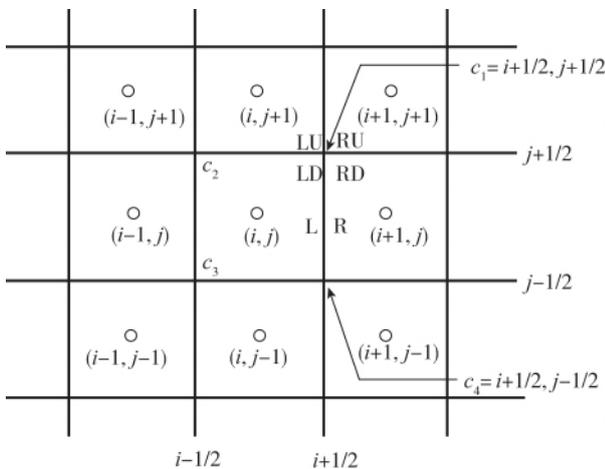


图 1 直角网格和角点 C_1 处 Riemann 问题的 4 个初态^[25]
Fig. 1 Cartesian cells with four initial states at the corner C_1 for two-dimensional Riemann problem^[25]

考虑图 1 中的网格单元 (i, j) . 传统的一维 Riemann 解算器只计算 4 个网格界面中点处由左右两个状态 (U_L, U_R) 状态构成的一维 Riemann 问题. 而

Balsara 等^[22-27] 的真正多维 Riemann 解算器, 除了求解网格界面中点处的一维 Riemann 问题外, 还需要求解网格界面角点处的二维 Riemann 问题. 如图 2 所示, 角点 C_1 的二维 Riemann 问题由 4 个相互作用的状态构成, 分别是左下 (U_{LD}) , 左上 (U_{LU}) , 右下 (U_{RD}) 和右上 (U_{RU}) . 其中 S_U, S_D, S_L, S_R 是沿着上下、左右 4 个方向传播最快的波速. 用 $F_{i+\frac{1}{2}j}^{mid}$ 和 $G_{ij+\frac{1}{2}}^{mid}$ 来表示界面中点的数值通量, $F_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{cor}$ 和 $G_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{cor}$ 表示界面角点的数值通量. 下面分别介绍中点和角点处数值通量的计算方法.

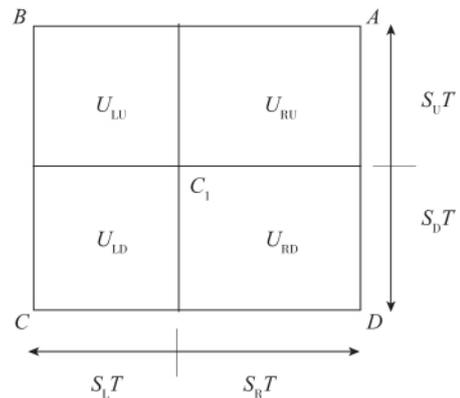


图 2 界面角点处的 Riemann 问题示意图
Fig. 2 Riemann problem at the corner of interfaces

2.2 界面中点数值通量的计算

按照 AUSM 分裂公式(3), 界面中点数值通量被分裂成对流数值通量和压力数值通量两部分:

$$F_{i+\frac{1}{2}j}^{mid} = F_{li+\frac{1}{2}j}^{mid} + F_{2i+\frac{1}{2}j}^{mid},$$

$$G_{ij+\frac{1}{2}}^{mid} = G_{li+\frac{1}{2}j}^{mid} + G_{2i+\frac{1}{2}j}^{mid}.$$

2.2.1 界面中点处对流通量的计算

由于对流通量 F_1 的 4 个特征值为 (u, μ, μ, μ) , 因此对流通量信息传播的方向只依赖于 x 方向的流体速度 u . 从而界面中点处 x 方向的数值对流通量可以采用下面的表达式计算:

$$F_{li+\frac{1}{2}j}^{mid} = u_* \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ (E+p) \end{bmatrix}_k.$$

与文献[25]的做法不同的是, 界面速度 u_* 取左右速度的算术平均值:

$$u_* = \frac{u_L + u_R}{2}.$$

数值实验证明这种取法比文献[25]的更加简单,

而且计算结果不会产生任何差异.

k 按照迎风方向来选取:

$$k = \begin{cases} L, & \text{if } u_* \geq 0, \\ R, & \text{if } u_* < 0. \end{cases}$$

类似地, y 方向界面中点处的对流量

$$\mathbf{G}_{li+j+\frac{1}{2}}^{\text{mid}} = v_* \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E + p \end{pmatrix}_k.$$

其中, 界面速度

$$v_* = \frac{v_L + v_R}{2}.$$

同样地, k 按迎风方向来选取:

$$k = \begin{cases} L, & \text{if } v_* \geq 0, \\ R, & \text{if } v_* < 0. \end{cases}$$

2.2.2 界面中点处压力通量的计算

根据文献 [25], 使用 HLL 格式计算网格界面中点处的数值压力通量:

$$\mathbf{F}_{2i+\frac{1}{2}j}^{\text{mid}} = \frac{S_R^M}{S_R^M - S_L^M} \mathbf{F}_{2L} - \frac{S_L^M}{S_R^M - S_L^M} \mathbf{F}_{2R} + \frac{S_R^M S_L^M}{S_R^M - S_L^M} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L). \quad (4)$$

其中, \mathbf{F}_{2L} 和 \mathbf{F}_{2R} 按照 AUSM 分裂公式 (3) 计算. 波速选取采用标准 HLL 格式中的 Roe 平均 [28]:

$$S_L^M = \min(0, u_L - a_L, \tilde{u} - \tilde{a}),$$

$$S_R^M = \max(0, u_R + a_R, \tilde{u} + \tilde{a}).$$

其中, \tilde{u} \tilde{a} 分别为 L, R 状态的 Roe 平均量.

经过简单计算, 式 (4) 可以改写成:

$$\mathbf{F}_{2i+\frac{1}{2}j}^{\text{mid}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{2L} + \mathbf{F}_{2R}) + \delta \mathbf{U}_2.$$

其中, 数值耗散项:

$$\delta \mathbf{U}_2 = \frac{S_R^M + S_L^M}{2(S_R^M - S_L^M)} (\mathbf{F}_{2L} - \mathbf{F}_{2R}) - \frac{S_L^M S_R^M}{S_R^M - S_L^M} (\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_R). \quad (5)$$

将守恒变量 \mathbf{U} 的各个分量代入到式 (5), 可得:

$$\delta \mathbf{U}_2 = \frac{S_R^M + S_L^M}{2(S_R^M - S_L^M)} (\mathbf{F}_{2L} - \mathbf{F}_{2R}) - \frac{S_L^M S_R^M}{S_R^M - S_L^M} \begin{pmatrix} \rho_L - \rho_R \\ (\rho u)_L - (\rho u)_R \\ (\rho v)_L - (\rho v)_R \\ E_L - E_R \end{pmatrix}. \quad (6)$$

在跨越接触间断时密度会改变, 而压力不会改变. 因此为了使格式能够精确捕捉接触间断, 采取文献 [25] 中的做法, 将式 (6) 最后一项中的密度差用压力差替换, 根据等熵条件 [25, 29],

$$\bar{a}^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho}.$$

式 (6) 可以修改为

$$\delta \mathbf{U}_2 = \frac{S_R^M + S_L^M}{2(S_R^M - S_L^M)} (\mathbf{F}_{2L} - \mathbf{F}_{2R}) - \frac{S_L^M S_R^M}{\bar{a}^2 (S_R^M - S_L^M)} \begin{pmatrix} p_L - p_R \\ (\rho u)_L - (\rho u)_R \\ (\rho v)_L - (\rho v)_R \\ E_L^* - E_R^* \end{pmatrix}.$$

其中,

$$\bar{a} = \frac{a_L + a_R}{2},$$

$$E_k^* = \frac{\bar{a}^2}{\gamma - 1} p_k + \frac{1}{2} p_k (u^2 + v^2)_k, \quad k = L, R.$$

2.3 界面角点数值通量的计算

按照 AUSM 分裂公式 (3), 界面角点 C_1 处的数值通量表示成对流量和压力通量之和:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{\text{cor}} = \mathbf{F}_{li+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{\text{cor}} + \mathbf{F}_{2i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{\text{cor}},$$

$$\mathbf{G}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{\text{cor}} = \mathbf{G}_{li+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{\text{cor}} + \mathbf{G}_{2i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{\text{cor}}.$$

2.3.1 界面角点处对流通量的计算

类似于界面中点处对流通量的计算, 同样采用迎风格式计算角点 C_1 处的对流量 [25]. 考虑了二维 Riemann 解后, 角点处 x 方向的对流量为

$$\mathbf{F}_{li+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{\text{cor}} = \frac{\bar{u} S_U}{S_U - S_D} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E + p \end{pmatrix}_{k_1} - \frac{\bar{u} S_D}{S_U - S_D} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E + p \end{pmatrix}_{k_2}.$$

其中, S_U 和 S_D 均为顶点处二维 Riemann 问题解的波速 (见 2.3.3 节). \bar{u} 为界面角点处 x 方向的平均速度 [22], 定义为

$$\bar{u} = \frac{u_{LU} S_U - u_{LD} S_D + u_{RU} S_U - u_{RD} S_D}{2(S_U - S_D)}.$$

迎风方向 k_1, k_2 的定义为:

$$\begin{cases} k_1 = LU, k_2 = LD, & \text{if } \bar{u} > 0; \\ k_1 = RU, k_2 = RD, & \text{if } \bar{u} < 0. \end{cases}$$

同样地,角点 C_1 处 y 方向的对流量:

$$\mathbf{G}_{li+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{\text{cor}} = \frac{\bar{v}S_R}{S_R - S_L} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E + p \end{pmatrix}_{k_1} - \frac{\bar{v}S_L}{S_R - S_L} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E + p \end{pmatrix}_{k_2}.$$

y 方向的平均速度,

$$\bar{v} = \frac{v_{RU}S_R - v_{LU}S_L + v_{RD}S_R - v_{LD}S_L}{2(S_R - S_L)}.$$

迎风方向 k_1, k_2 的定义为

$$\begin{cases} k_1 = \text{RD}, k_2 = \text{LD}, & \text{if } \bar{v} > 0; \\ k_1 = \text{RU}, k_2 = \text{LU}, & \text{if } \bar{v} < 0. \end{cases}$$

2.3.2 界面角点处压力通量的计算

同样使用类似于文献[25]的HLL格式计算界面角点处的压力通量,以 x 方向为例:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{\text{cor}} = & \frac{\mathbf{F}_{2LU}S_R S_U - \mathbf{F}_{2RU}S_L S_U + \mathbf{F}_{2RD}S_L S_D - \mathbf{F}_{2LD}S_R S_D}{(S_R - S_L)(S_U - S_D)} - \\ & \frac{2S_R S_L (\mathbf{G}_{2RU} - \mathbf{G}_{2LU} + \mathbf{G}_{2LD} - \mathbf{G}_{2RD})}{(S_R - S_L)(S_U - S_D)} + \\ & \frac{S_R S_L [S_U(\mathbf{U}_{RU} - \mathbf{U}_{LU}) - S_D(\mathbf{U}_{RD} - \mathbf{U}_{LD})]}{(S_R - S_L)(S_U - S_D)}. \end{aligned} \quad (7)$$

其中,右端第1项为非耗散的法向通量,第2项为横向通量的贡献,最后一项为耗散项.

令

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{2L} &= \frac{\mathbf{F}_{2LU}S_U - \mathbf{F}_{2LD}S_D}{S_U - S_D}, \\ \hat{\mathbf{F}}_{2R} &= \frac{\mathbf{F}_{2RU}S_U - \mathbf{F}_{2RD}S_D}{S_U - S_D}. \end{aligned}$$

式(7)可以改写成:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{\text{cor}} = & \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}_{2L} + \hat{\mathbf{F}}_{2R}) + \delta\mathbf{U}_{2x} - \\ & \frac{2S_R S_L (\mathbf{G}_{2RU} - \mathbf{G}_{2LU} + \mathbf{G}_{2LD} - \mathbf{G}_{2RD})}{(S_R - S_L)(S_U - S_D)}. \end{aligned}$$

其中,数值耗散项:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{U}_{2x} = & \frac{S_R + S_L}{2(S_R - S_L)}(\hat{\mathbf{F}}_{2L} - \hat{\mathbf{F}}_{2R}) + \\ & \frac{S_R S_L [S_U(\mathbf{U}_{RU} - \mathbf{U}_{LU}) - S_D(\mathbf{U}_{RD} - \mathbf{U}_{LD})]}{(S_R - S_L)(S_U - S_D)}. \end{aligned} \quad (8)$$

将守恒变量 U 的各个分量代入式(8)的最后一项,式(8)可以改写成为:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{U}_{2x} = & \frac{S_R + S_L}{2(S_R - S_L)}(\hat{\mathbf{F}}_{2L} - \hat{\mathbf{F}}_{2R}) + \frac{S_R S_L}{(S_R - S_L)(S_U - S_D)} \cdot \\ & \begin{bmatrix} S_U(\rho_{RU} - \rho_{LU}) - S_D(\rho_{RD} - \rho_{LD}) \\ S_U[(\rho u)_{RU} - (\rho u)_{LU}] - S_D[(\rho u)_{RD} - (\rho u)_{LD}] \\ S_U[(\rho v)_{RU} - (\rho v)_{LU}] - S_D[(\rho v)_{RD} - (\rho v)_{LD}] \\ S_U(E_{RU} - E_{LU}) - S_D(E_{RD} - E_{LD}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

和中点处的压力通量处理方式一样,将式(9)中的密度差用压力差代替,可以得到:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{U}_{2x} = & \frac{S_R + S_L}{2(S_R - S_L)}(\hat{\mathbf{F}}_{2L} - \hat{\mathbf{F}}_{2R}) + \frac{S_R S_L}{\bar{a}^2(S_R - S_L)(S_U - S_D)} \cdot \\ & \begin{bmatrix} S_U(p_{RU} - p_{LU}) - S_D(p_{RD} - p_{LD}) \\ S_U[(\rho u)_{RU} - (\rho u)_{LU}] - S_D[(\rho u)_{RD} - (\rho u)_{LD}] \\ S_U[(\rho v)_{RU} - (\rho v)_{LU}] - S_D[(\rho v)_{RD} - (\rho v)_{LD}] \\ S_U(E_{RU}^* - E_{LU}^*) - S_D(E_{RD}^* - E_{LD}^*) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{a_{LU} + a_{RU} + a_{LD} + a_{RD}}{4}, \\ E_k^* &= \frac{\bar{a}^2}{\gamma - 1} p_k + \frac{1}{2} p_k (u^2 + v^2)_k, \\ k &= \text{LU}, \text{RU}, \text{LD}, \text{RD}. \end{aligned} \quad (10)$$

同样,界面角点处 y 方向的数值通量:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{2i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{\text{cor}} = & \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{G}}_{2D} + \hat{\mathbf{G}}_{2U}) + \delta\mathbf{U}_{2y} - \\ & \frac{2S_U S_D (\mathbf{F}_{2RU} - \mathbf{F}_{2LU} + \mathbf{F}_{2LD} - \mathbf{F}_{2RD})}{(S_R - S_L)(S_U - S_D)}. \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}}_{2D} &= \frac{\mathbf{G}_{2RD}S_R - \mathbf{G}_{2LD}S_L}{S_R - S_L}, \\ \hat{\mathbf{G}}_{2U} &= \frac{\mathbf{G}_{2RU}S_R - \mathbf{G}_{2LU}S_L}{S_R - S_L}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{U}_{2y} = & \frac{S_U + S_D}{2(S_U - S_D)}(\hat{\mathbf{G}}_{2D} - \hat{\mathbf{G}}_{2U}) + \frac{S_U S_D}{\bar{a}^2(S_R - S_L)(S_U - S_D)} \cdot \\ & \begin{bmatrix} S_R(p_{RD} - p_{RU}) - S_L(p_{LD} - p_{LU}) \\ S_R[(\rho u)_{RD} - (\rho u)_{RU}] - S_L[(\rho u)_{LD} - (\rho u)_{LU}] \\ S_R[(\rho v)_{RD} - (\rho v)_{RU}] - S_L[(\rho v)_{LD} - (\rho v)_{LU}] \\ S_R(E_{RD}^* - E_{RU}^*) - S_L(E_{LD}^* - E_{LU}^*) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

平均声速 \bar{a} 和总能 E_k^* 的定义见式(10).

2.3.3 角点处波速的选取

采用 Roe 平均的方法计算角点处的 4 个波速

S_L, S_R, S_D, S_U :

$$S_L = \min [0, \lambda_x^0(U_{LU}), \lambda_x^0(U_{LD}), \tilde{\lambda}_x^0(U_{LU}, U_{RU}), \tilde{\lambda}_x^0(U_{LD}, U_{RD})],$$

$$S_R = \max [0, \lambda_x^1(U_{RU}), \lambda_x^1(U_{RD}), \tilde{\lambda}_x^1(U_{LU}, U_{RU}), \tilde{\lambda}_x^1(U_{LD}, U_{RD})],$$

$$S_D = \min [0, \lambda_y^0(U_{RD}), \lambda_y^0(U_{LD}), \tilde{\lambda}_y^0(U_{RD}, U_{RU}), \tilde{\lambda}_y^0(U_{LD}, U_{LU})],$$

$$S_U = \max [0, \lambda_y^1(U_{RU}), \lambda_y^1(U_{LU}), \tilde{\lambda}_y^1(U_{RD}, U_{RU}), \tilde{\lambda}_y^1(U_{LD}, U_{LU})].$$

其中,

$\lambda_x^0(U_{LU})$ 代表在状态 U_{LU} 处 x 方向的最小波速;

$\lambda_x^1(U_{RU})$ 代表在状态 U_{RU} 处 x 方向的最大波速;

$\tilde{\lambda}_x^0(U_{LU}, U_{RU})$ 代表 U_{LU} 和 U_{RU} 之间 Roe 平均状态沿 x 方向的最小波速;

$\tilde{\lambda}_x^1(U_{LU}, U_{RU})$ 代表 U_{LU} 和 U_{RU} 之间 Roe 平均状态沿 x 方向的最大波速. 例如, 在规则的矩形网格上:

$$\lambda_x^0(U_{LU}) = U_{LU} - a_{LU}, \lambda_x^1(U_{RU}) = U_{RU} + a_{RU},$$

$$\tilde{\lambda}_x^0(U_{LU}, U_{RU}) = \tilde{u} - \tilde{a}, \tilde{\lambda}_x^1(U_{LU}, U_{RU}) = \tilde{u} + \tilde{a}.$$

2.4 网格界面总数值通量的计算

采用 Simpson 公式组合界面中点通量和角点通量计算每个网格界面最终的数值通量:

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{1}{6} F_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{cor_1} + \frac{4}{6} F_{i+\frac{1}{2}j}^{mid} + \frac{1}{6} F_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{cor_2},$$

$$\bar{G}_{ij+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} G_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{cor_1} + \frac{4}{6} G_{ij+\frac{1}{2}}^{mid} + \frac{1}{6} G_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{cor_2}.$$

3 高阶精度

本文算例采用 2 阶时间精度和空间精度. 其中时间离散采用 2 阶 TVD Runge-Kutta 格式, 空间重构采用基于 SDWLS (solution dependent weighted least squares) 梯度的线性重构.

3.1 时间离散格式

采用文献 [30] 中的 2 阶 Runge-Kutta 格式进行时间离散:

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n),$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2} U^n + \frac{1}{2} U^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t L(U^{(1)}).$$

3.2 基于 SDWLS 梯度的线性重构

采用文献 [31] 中的基于 SDWLS 梯度的线性重构得到空间的 2 阶精度. 在计算网格界面中点处的

数值通量时需要重构界面左右两个状态的物理量, 以 x 方向的速度 u 为例, 重构公式为

$$u_{i+\frac{1}{2}j}^L = u_{ij} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \Delta x^L + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \Delta y^L,$$

$$u_{i+\frac{1}{2}j}^R = u_{i+1j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1j} \Delta x^R + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1j} \Delta y^R.$$

其中,

$$\Delta x^L = x_{i+\frac{1}{2}j} - x_{ij}, \Delta y^L = y_{i+\frac{1}{2}j} - y_{ij},$$

$$\Delta x^R = x_{i+\frac{1}{2}j} - x_{i+1j}, \Delta y^R = y_{i+\frac{1}{2}j} - y_{i+1j}.$$

在计算界面角点处的数值通量时, 需要重构角点周围 4 个状态的物理量, 以图 1 中的角点 C_1 为例, 4 个状态分别由 4 个单元的重构得到:

$$u_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{LD} = u_{ij} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \Delta x^{LD} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \Delta y^{LD},$$

$$u_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{RD} = u_{i+1j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1j} \Delta x^{RD} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1j} \Delta y^{RD},$$

$$u_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{LU} = u_{ij+1} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij+1} \Delta x^{LU} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij+1} \Delta y^{LU},$$

$$u_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{RU} = u_{i+1j+1} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1j+1} \Delta x^{RU} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1j+1} \Delta y^{RU}.$$

其中,

$$\Delta x^{LD} = x_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - x_{ij}, \Delta y^{LD} = y_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - y_{ij},$$

$$\Delta x^{RD} = x_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - x_{i+1j}, \Delta y^{RD} = y_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - y_{i+1j},$$

$$\Delta x^{LU} = x_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - x_{ij+1}, \Delta y^{LU} = y_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - y_{ij+1},$$

$$\Delta x^{RU} = x_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - x_{i+1j+1}, \Delta y^{RU} = y_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - y_{i+1j+1}.$$

在进行网格划分时, 界面角点定义在网格点处, 而界面的中点坐标和单元的中心点坐标可以用角点坐标的算术平均值计算, 例如:

$$x_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}{2},$$

$$x_{ij} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{4}.$$

对于网格单元 (i, j) 的 SDWLS 梯度, 其计算公式由极小化当前线性重构在周围 8 个网格中心点取值和原当地值之差的加权平方和获得:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} = (l_{22}r_1 - l_{21}r_2) / G,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} = (l_{11}r_2 - l_{12}r_1) / G.$$

其中,

$$l_{11} = \sum_k w_k \Delta x_k^2, l_{22} = \sum_k w_k \Delta y_k^2,$$

$$l_{12} = l_{21} = \sum_k w_k \Delta x_k \Delta y_k,$$

$$r_1 = \sum_k w_k \Delta x_k \Delta u_k, r_2 = \sum_k w_k \Delta y_k \Delta u_k,$$

$$G = l_{11} l_{22} - l_{12}^2,$$

$$w_k = \frac{1}{(\Delta u_k^2 + \varepsilon)}, \varepsilon = 10^{-9}.$$

$k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 分别对应着网格单元 $(i-1, j-1), (i-1, j), (i-1, j+1), (i, j+1), (i+1, j+1), (i+1, j), (i+1, j-1), (i, j-1)$, $\Delta u_k = u_k - u_{i,j}$.

虽然 SDWLS 重构适合于结构化直边四边形网格,但本文的通量公式仅适用于直角坐标网格.因此,后面数值算例中的网格都是直角坐标网格.

4 数值结果

通过一维和二维的数值算例来比较传统的一维 HLL 格式和真正多维的 GM-HLL-A 格式的表现.

4.1 精度测试

使用文献 [32] 中提出的数值算例来测试 GM-HLL-A 格式的精度. 计算区域为 $[0, 2] \times [0, 2]$, 初始条件:

$$\rho_0 = 1 + 0.2 \sin[\pi(x + y)],$$

$$u_0 = 0.7, v_0 = 0.3, p_0 = 1.$$

4 个边界均使用周期性边界条件, 计算中使用的 CFL 数为 0.9, 计算时间 $T=4$. 该问题的精确解为

$$\rho(t, x, y) = 1 + 0.2 \sin[\pi(x + y - t)].$$

表 1 给出了在不同网格数下误差的 L_1 范数和 L_∞ 范数以及相应的收敛阶数. 从表 1 可以看到, 真正多维的 GM-HLL-A 格式不仅能够达到空间的 2 阶精度, 而且还表现出良好的网格收敛性.

表 1 GM-HLL-A 格式的精度测试
Table 1 Accuracy test of GM-HLL-A scheme

meshes	L_1 norm	order	L_∞ norm	order
16×16	5.57×10^{-2}	-	1.02×10^{-1}	-
32×32	1.65×10^{-2}	1.79	3.84×10^{-2}	1.41
64×64	4.29×10^{-3}	1.94	1.28×10^{-2}	1.58
128×128	1.02×10^{-3}	2.07	3.54×10^{-3}	1.85
256×256	2.36×10^{-4}	2.11	9.26×10^{-4}	1.93
512×512	5.23×10^{-5}	2.17	2.18×10^{-4}	2.09

4.2 一维激波管问题

计算 4 个一维激波管问题进行格式的比较. 表 2

列出了 4 个算例的左右状态初始值, 初始间断的位置和计算时间. 比较使用 Riemann 问题精确解, 一维 HLL 格式和真正多维 GM-HLL-A 格式计算的结果. 计算区域为 $[0, 1]$, 使用精确 Riemann 解计算时的网格数为 2000, 使用一维 HLL 格式和多维 GM-HLL-A 格式计算时使用的网格数均为 100.

表 2 一维激波管问题初始值
Table 2 Data for 1D shock tube test problems

No.	$(\rho \ \mu \ p)_L$	$(\rho \ \mu \ p)_R$	x_0	t
1	(1.0 0.75 1.0)	(0.125 0.0 0.1)	0.3	0.2
2	(1.0 -19.59745, 1000.0)	(1.0 -19.59745, 0.01)	0.8	0.012
3	(1.4 0.0 1.0)	(1.0 0.0 1.0)	0.5	2
4	(1.4 0.1 1.0)	(1.0 0.1 1.0)	0.5	2

算例 1 由一个右行激波、一个接触间断和一个左行的膨胀波组成, 其中膨胀波里面包含一个声速点. 从图 3 可以看到, 一维 HLL 格式和真正多维的 GM-HLL-A 格式都非常光滑地跨越了声速点, 并且对于其他波系的分辨率都非常接近精确解.

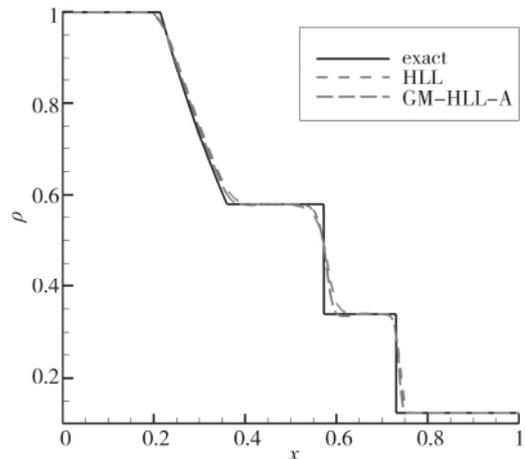


图 3 一维激波管问题算例 1 的计算结果
Fig. 3 Results of case 1 of 1D shock tube problems

算例 2 的精确解包含一个右行的强激波、一个静止的接触间断和一个左行的膨胀波. 从图 4 可以看到, 一维 HLL 格式未能捕捉到接触间断, 而真正多维的 GM-HLL-A 格式精确地捕捉到了接触间断. 值得注意的是, 如果想要精确地捕捉膨胀波, 使用一维 HLL 格式时 CFL 数不能超过 0.3, 而 GM-HLL-A 格式的 CFL 数可以取到 0.95. 图 4 中 HLL 格式的计算结果选取的 CFL 数为 0.25, GM-HLL-A 格式的计算结果选取的 CFL 数为 0.95.

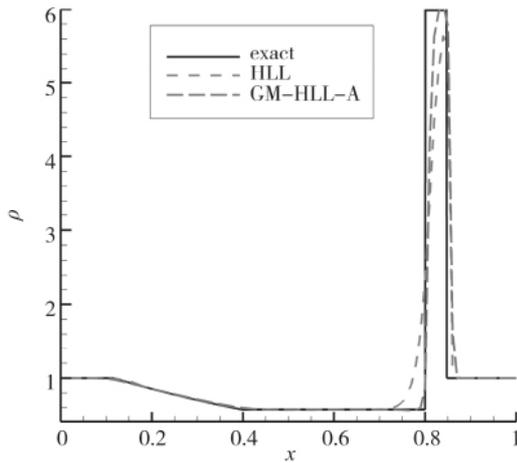


图 4 一维激波管问题算例 2 的计算结果
Fig. 4 Results of case 2 of 1D shock tube problems

$$\begin{aligned}
 \text{case1: } & \begin{cases} (\rho, u, v, p) = (1.0, 0.7276, 0.0, 1.0), & \text{if } x < 0.5, y > 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (0.5313, 0, 0, 0.4), & \text{if } x > 0.5, y > 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (1.0, 0.0, 0.7276, 1.0), & \text{if } x > 0.5, y < 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (0.8, 0, 0, 1.0), & \text{if } x < 0.5, y < 0.5. \end{cases} \\
 \text{case2: } & \begin{cases} (\rho, u, v, p) = (2.0, 0.75, 0.5, 1.0), & \text{if } x < 0.5, y > 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (1.0, 0.75, -0.5, 1.0), & \text{if } x > 0.5, y > 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (3.0, -0.75, -0.5, 1.0), & \text{if } x > 0.5, y < 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (1.0, -0.75, 0.5, 1.0), & \text{if } x < 0.5, y < 0.5. \end{cases} \\
 \text{case3: } & \begin{cases} (\rho, u, v, p) = (0.5197, -0.6259, -0.3, 0.4), & \text{if } x < 0.5, y > 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (1.0, 0.1, -0.3, 1.0), & \text{if } x > 0.5, y > 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (0.5313, 0.1, 0.4276, 0.4), & \text{if } x > 0.5, y < 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (0.8, 0.1, -0.3, 0.4), & \text{if } x < 0.5, y < 0.5. \end{cases} \\
 \text{case4: } & \begin{cases} (\rho, u, v, p) = (0.5313, 0.8276, 0, 0.4), & \text{if } x < 0.5, y > 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (1, 0.1, 0, 1), & \text{if } x > 0.5, y > 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (0.5313, 0.1, 0.7276, 0.4), & \text{if } x > 0.5, y < 0.5; \\ (\rho, u, v, p) = (0.8, 0.1, 0, 0.4), & \text{if } x < 0.5, y < 0.5. \end{cases}
 \end{aligned}$$

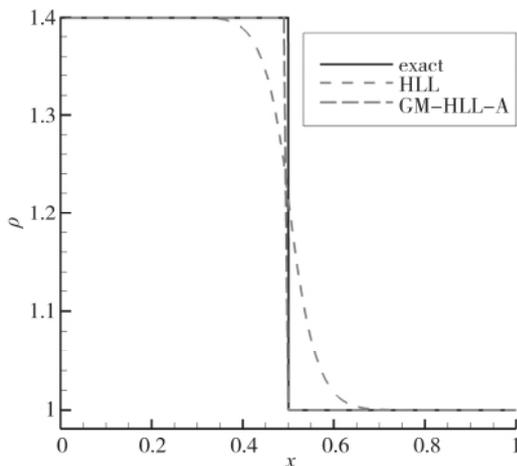


图 5 一维激波管问题算例 3 的计算结果
Fig. 5 Results of case 3 of 1D shock tube problems

算例 3 是一个孤立静止的接触间断. 从图 5 可以看到, 传统的一维 HLL 格式不能分辨接触间断, 而真正多维的 GM-HLL-A 格式却能精确地捕捉到接触间断.

算例 4 是一个孤立右行的接触间断. 从图 6 可以看到, 真正多维的 GM-HLL-A 格式在接触间断附近的耗散要小于一维 HLL 格式.

4.3 二维 Riemann 问题

考虑文献 [20] 中的 4 个二维 Riemann 问题. 计算区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 计算中使用 400×400 的正方形网格. 初始条件分别为

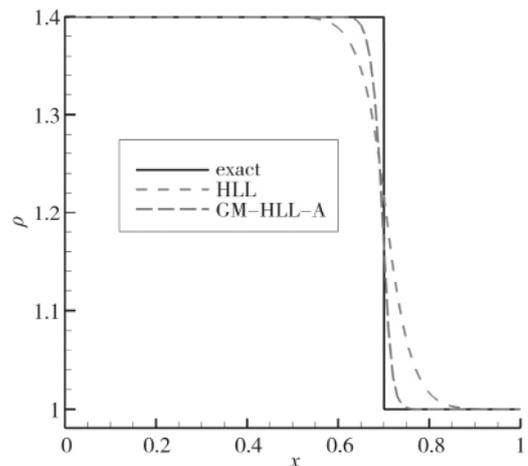
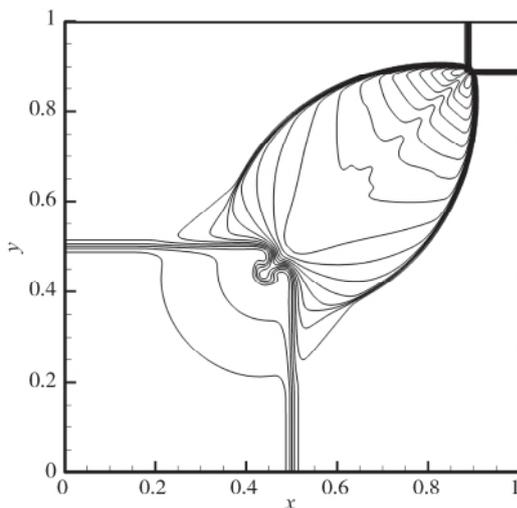


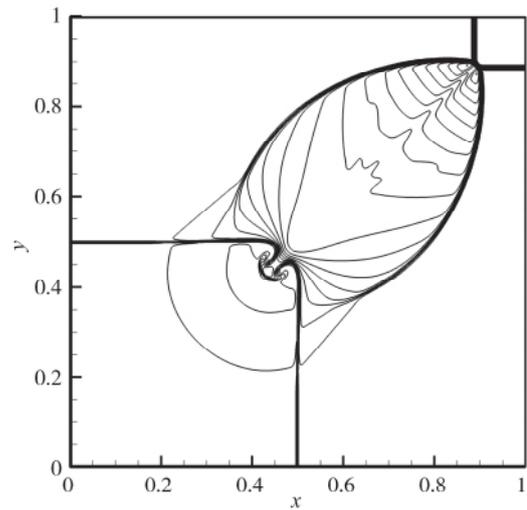
图 6 一维激波管问题算例 4 的计算结果
Fig. 6 Results of case 4 of 1D shock tube problems

第1个 Riemann 问题的初始状态由两个接触间断 J 和两个向前的激波 \vec{S} 组成. 借用文献 [33] 中的符号表示, 该 Riemann 问题可以表示成 $\vec{S}_{21} J_{32} J_{34} \vec{S}_{41}$, 其中下标的数表示象限的编号, 如 21 表示跨第 2 象限和第 1 象限. 以 (0.5, 0.5) 作为坐标原点, 坐标轴平行于图 7 中的 x 和 y 方向, 建立坐标系并划分 4 个象限. 随着时间的发展, 所有的滑移线会与左下角第 3 象限常数态的声速环相交, 并且会在该象限声速环内的亚声速区域末端弯曲成螺旋状. 此外, 在激波 \vec{S}_{21} 和 \vec{S}_{41} 的相互作用下, 会出现一对三激波结构, 其亚声速区域以两个相邻的 Mach 激波和两个反射激波为边界. 图 7 展示了一维 HLL 格式和多维 GM-HLL-A 格式在时间 $T=0.25$ 时的密度轮廓, 图中画出了 0.54~1.70 之间的 30 条密度等值线. 从图中可以看到, 相比于一维 HLL 格式, 多维 GM-HLL-A 格式不仅可以捕捉到接触间断 J_{32} 和 J_{34} , 而且对于其他波系也有更高的分辨率. 值得注意的是, 使用一维 HLL 格式计算时选取的 CFL 数不能超过 0.6; 而使用 GM-HLL-A 格式计算时, CFL 可以取到 0.9.

第 2 个 Riemann 问题的初始状态由 4 个接触间断 $J_{21} J_{32} J_{34} J_{41}$ 组成. 该问题的解会出现一个沿顺时针方向转动的涡形结构, 4 个接触间断会在中心盘旋. 图 8 展示了两种数值格式在时间 $T=0.3$ 的密度轮廓, 图中画出了 0.25~3.05 之间的 29 条等值线. 从图中可以看到, 相比于一维 HLL 格式, 多维 GM-HLL-A 格式不仅在接触间断附近的耗散更小, 而且对于波纹和滑移线的分辨率也更高. 在使用一维 HLL 格式计算时选取的 CFL 数不能超过 0.6, 而使用多维 GM-HLL-A 格式时 CFL 数可以取到 0.95.

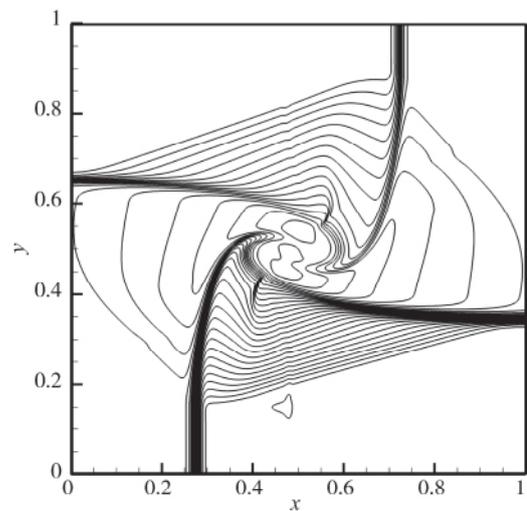


(a) HLL

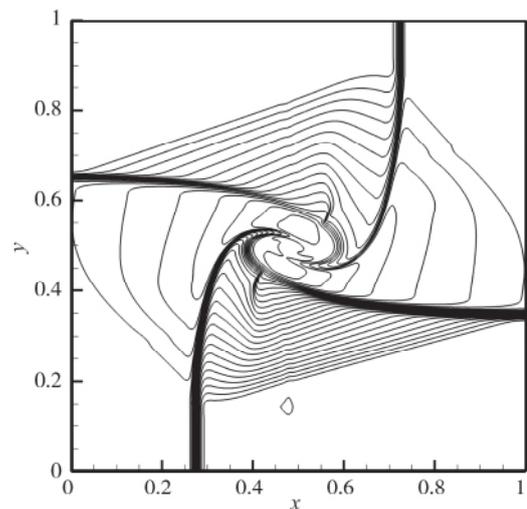


(b) GM-HLL-A

图 7 二维 Riemann 问题算例 1 的计算结果
Fig. 7 Results of case 1 of 2D Riemann problems



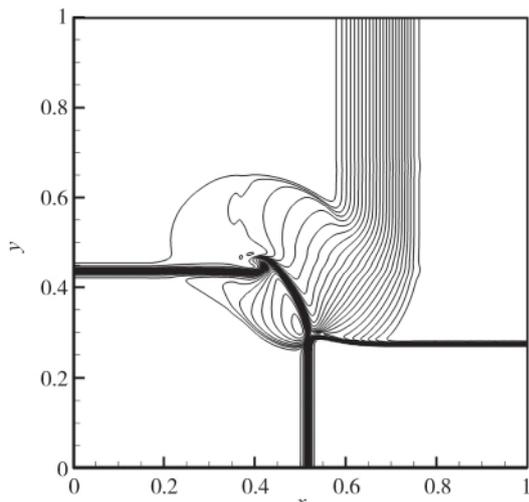
(a) HLL



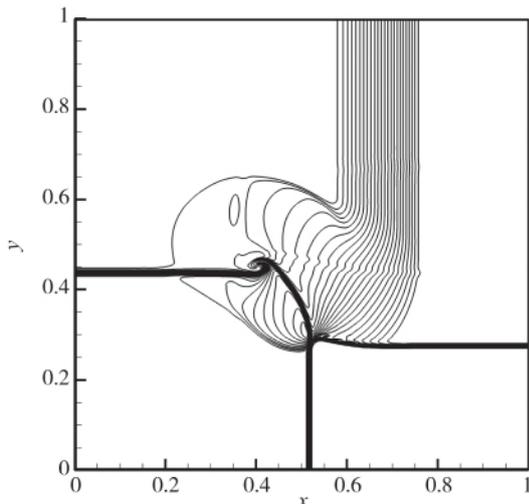
(b) GM-HLL-A

图 8 二维 Riemann 问题算例 2 的计算结果
Fig. 8 Results of case 2 of 2D Riemann problems

第 3 个 Riemann 问题的初值由一个膨胀波、两个接触间断和一个激波组成,即 $\vec{R}_{21}J_{32}J_{34}\vec{S}_{41}$. 两个接触间断在进入亚声速区后在末端会弯曲成螺旋状. 图 9 展示了两种数值格式在时间 $T=0.2$ 时的密度轮廓, 图中画出了从 0.43~0.99 之间的 29 条等值线. 从图中可以看到, 多维 GM-HLL-A 格式不仅在接触间断附近的耗散更小, 而且还能捕捉到膨胀波内部更为细小的波纹. 同样地, 使用一维 HLL 格式计算时选取的 CFL 数不能超过 0.6, 而使用多维 GM-HLL-A 格式时 CFL 数可以取到 0.95.



(a) HLL

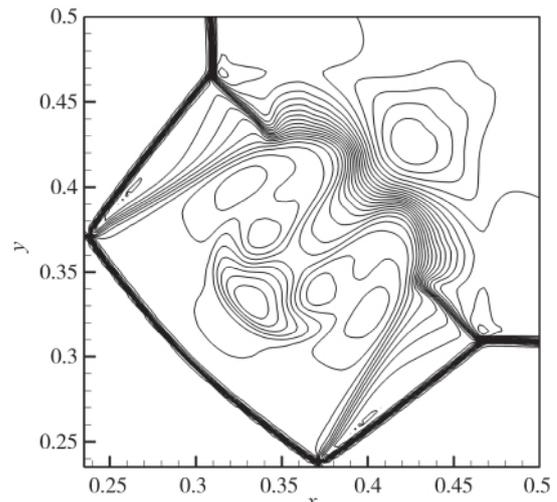


(b) GM-HLL-A

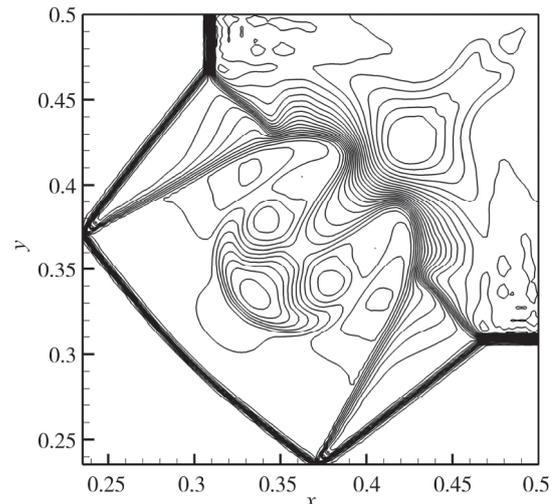
图 9 二维 Riemann 问题算例 3 的计算结果
Fig. 9 Results of case 3 of 2D Riemann problems

第 4 个 Riemann 问题对于数值格式的要求最为苛刻. 其初始状态由 4 个向后激波 $\vec{S}_{21}\vec{S}_{32}\vec{S}_{34}\vec{S}_{41}$ 组成. 该问题的解会形成两个双 Mach 反射和一个沿着西南方向成 45° 角的激波, 且波系结构会关于 $x =$

y 对称, 详细的波系结构分析可以参考文献 [33] 中的 Configuration 3. 为了更加清晰地对比两个数值格式计算结果的差异, 我们仅仅展示了区域中间的波系结构, 忽视了几乎没有任何差异的其他区域的图像. 图 10 展示了时间 $T=0.3$ 时的密度轮廓, 图中画出了从 0.16~0.71 之间的 32 条等值线. 从图中可以看到, 相比于一维 HLL 格式, 多维 GM-HLL-A 格式对于波系结构有更高的分辨率. 并且在使用一维 HLL 格式计算时, 选取的 CFL 数不能超过 0.5; 而使用 GM-HLL-A 计算时, CFL 数可以取到 0.9.



(a) HLL



(b) GM-HLL-A

图 10 多维 Riemann 问题算例 4 的计算结果
Fig. 10 Results of case 4 of 2D Riemann problems

4.4 径向 Riemann 问题

计算区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$. 初始时区域中间的圆形区域有静止的高压气体, 周围由静止的低压气体包围, 圆心位于区域的中心. 计算中使用的网格

数为 200×200 . 初始条件为

$$\begin{cases} \rho = 2, u = v = 0, p = 15, & \text{if } r < 0.13; \\ \rho = 1, u = v = 0, p = 2, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

图 11 展示了时间 $T=0.13$ 时的密度轮廓,画出了从 $0.1 \sim 1.8$ 之间的 35 条轮廓线. 从图中可以看到,相比于一维 HLL 格式,多维 GM-HLL-A 格式不仅对于波系结构有更高的分辨率,而且更好地保持了波系的圆形结构,尤其是对于区域中心部位. 在使用一维 HLL 格式计算时,为了得到稳定的圆形波系,选取的 CFL 数不能超过 0.5; 而使用多维 GM-HLL-A 格式计算时, CFL 数可以取到 0.95. 图 11 展示的 HLL 格式的计算结果使用的 CFL 数为 0.5, GM-HLL-A 格式的计算结果使用的 CFL 数为 0.95.

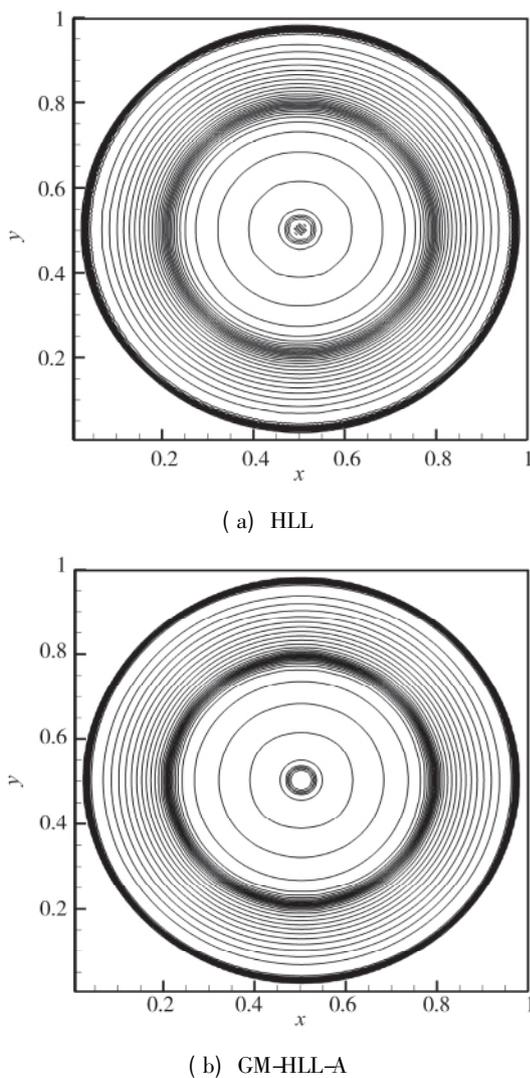


图 11 径向 Riemann 问题的计算结果
Fig. 11 Results of radial Riemann problems

4.5 健壮性测试

前面的数值实验表明,真正多维的 GM-HLL-A

格式可以捕捉接触间断. 但是文献 [34-38] 都提到,能够精确分辨接触间断的数值格式,例如 HLLC 和 Roe 格式,都会遭受不同程度的激波不稳定现象,如膨胀激波、负内能、慢行激波、红斑现象、双 Mach 杆和奇偶失联等现象. 这一部分计算几个经典的算例来展现 GM-HLL-A 格式在计算中的稳定性和健壮性.

4.5.1 奇偶失联问题

该数值实验由 Quirk 在文献 [34] 中提出. 平面激波以 Mach 数为 6 的速度从左向右移动,计算区域为 $[0, 20] \times [0, 1]$ 的均匀导管,网格为 400×20 的矩形网格. 网格中心线处的小扰动给定为

$$y_{i,jmid} = y_{i,jmid} + (-1)^i \cdot 10^{-6}.$$

激波右边的初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = (1.4, 0, 0, 1).$$

图 12 展示了多维 GM-HLL-A 格式和一维 HLLC 格式在时间 $T=2$ 的密度等值线图. 从图中清晰地看到,多维 GM-HLL-A 格式不仅不会出现激波不稳定现象,而且对于激波的分辨率甚至高于一维 HLLC 格式.

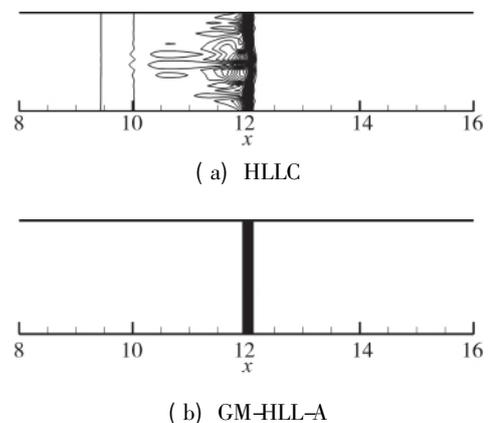


图 12 奇偶失联问题的计算结果
Fig. 12 Results of odd-even decoupling problems

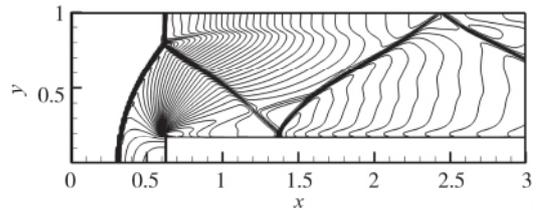
4.5.2 激波衍射问题

激波衍射问题是一个对许多 Godunov 型数值格式都失效的数值试验^[39]. 计算区域 $[0, 1] \times [0, 1]$, 网格数为 400×400 , 计算 Mach 数为 5.09. 图 13 为时间 $T=0.15$ 的密度等值线图. 从图中可以看到,多维 GM-HLL-A 格式在区域上边界的正激波处不会出现激波不稳定现象,而且对于波系的分辨率也可以比拟传统的一维 HLLC 格式,例如,绕射激波在后阶上的 Mach 反射激波,以及流场中间的小激波和稍前面的稀疏波都清晰可见.

4.5.3 前台阶问题

计算区域为 $[0, 3] \times [0, 1]$, 在 $x=0.6$ 处有一个

高为 0.2 的台阶. 自左向右的来流 Mach 数为 3, 计算中使用的网格数为 240×80 . 详细的初边界条件, 见参考文献 [40]. 图 14 展示了时间 $T=4$ 时使用一维 HLLC 格式和多维 GM-HLL-A 格式计算所得的密度等值线图. 从图中可以清晰地看到 GM-HLL-A 格式的计算结果在上壁面 Mach 杆后面不会出现激波不稳定性现象, 并且 Mach 杆后面滑移线的分辨率也和 HLLC 格式差不多. 在使用一维 HLLC 格式计算时, 选取的 CFL 不能超过 0.25; 而使用多维 GM-HLL-A 格式计算时, CFL 数可以取到 0.8.



(b) GM-HLL-A

图 14 前台阶问题的计算结果

Fig. 14 Results of forward facing step problems

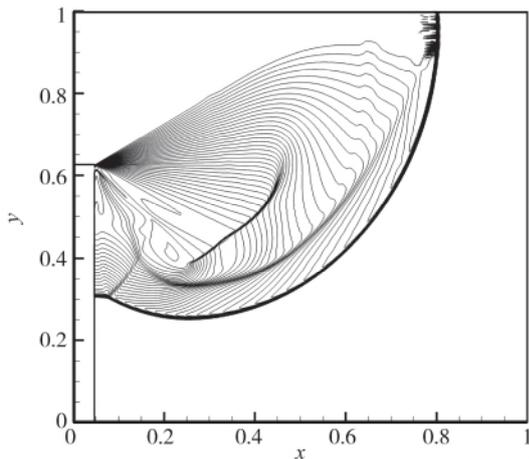
5 结论

本文给出了一种真正多维的 GM-HLL-A Riemann 解法器. 主要采用 Balsara 的考虑网格界面角点处的多维 Riemann 问题的思想. 利用 AUSM 分裂方法将通量分解成对流通量和压力通量两部分. 其中, 对流通量的计算使用迎风格式, 压力通量的计算使用 HLL 格式, 并将 HLL 格式耗散项中的密度差用压力差代替, 从而使得构造的数值格式能够准确捕捉接触间断. 为了实现格式真正多维的特性, 分别计算界面中点和角点处的数值通量, 然后采用 Simpson 公式得到界面最终的数值通量. 数值实验表明, 相比于传统的一维 HLL 格式, 真正多维的 GM-HLL-A 格式能够准确捕捉接触间断, 在计算中不会出现激波不稳定现象, 且可以使用更大的时间步长. 因此, GM-HLL-A 格式是一种高分辨率、高效率并且健壮的数值格式.

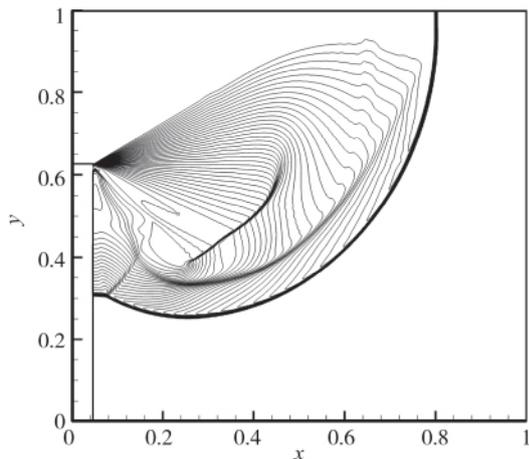
致谢 本文工作得到国家 973 计划资助项目 (2010CB731505), 国家自然科学基金资助项目 (11261160486, 11321061) 的赞助, 谨此致谢.

参考文献 (References)

- [1] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 43(2): 357-372.
- [2] Harten A, Lax P D, Van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM Review*, 1983, 25(1): 35-61.
- [3] Toro E F, Spruce M, Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver [J]. *Shock Waves*, 1994, 4(1): 25-34.
- [4] Steger J L, Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gas dynamic equations with application to finite



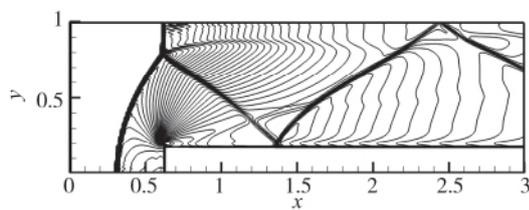
(a) HLLC



(b) GM-HLL-A

图 13 激波衍射问题的计算结果

Fig. 13 Results of shock diffraction problems



(a) HLLC

- difference methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 40(2): 263-293.
- [5] Van Leer B. Flux-vector splitting for the Euler equations [R]. NASA Langley Research Center Technical Report ICASE 1982-30, 1982.
- [6] Van Leer B. Flux vector splitting for the Euler equations [A]. //Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics [C]. Aachen, 1982: 507-512.
- [7] Anderson W K, Thomas J L, Van Leer B. Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations [J]. *AIAA Journal*, 1985, 24(9): 1453-1460.
- [8] Anderson W K, Thomas J L, Rumsey L. Extension and application of flux-vector splitting to calculations on dynamic meshes [J]. *AIAA Journal*, 1989, 27(6): 673-674.
- [9] Liou M S, Steffen C J. A new flux splitting scheme [J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, 107(1): 23-39.
- [10] Liou M S. A sequel to AUSM: AUSM+ [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 129(2): 364-382.
- [11] Liou M S. Recent progress and applications of AUSM+[A]. //Sixteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics [C]. Arcachon, 1998: 302-307.
- [12] Liou M S. A Sequel to AUSM, Part II: AUSM+_{up} for all speeds [J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 214(1): 137-170.
- [13] Zha G C, Bilgen E. Numerical solution of Euler equations by a new flux vector splitting scheme [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1993, 17(2): 115-144.
- [14] Toro E F, Vázquez-Cendón M E. Flux splitting schemes for the Euler equations [J]. *Computers & Fluids*, 2012, 70(1): 1-12.
- [15] Collela P. Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 1990, 87(1): 171-200.
- [16] Billet S, Toro E F. On WAF-type schemes for multi-dimensional Riemann solver for Euler equations of gas dynamics [J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 130: 1-24.
- [17] LeVeque R J. Wave propagation algorithms for multi-dimensional hyperbolic systems [J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 131(2): 327-353.
- [18] Fey M. Multidimensional upwinding I: the method of transport for solving the Euler equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, 143(1): 159-180.
- [19] Fey M. Multidimensional upwinding II: the method of transport for solving the Euler equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, 143(1): 181-203.
- [20] Brio M, Zakharian A R, Webb G M. Two dimensional Riemann solver for Euler equations for gas dynamics [J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 167(1): 177-195.
- [21] Wendroff B. A two-dimensional HLLC Riemann solver and associated Godunov-type difference scheme for gas dynamics [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 1999, 38(11/12): 175-185.
- [22] Balsara D S. Multidimensional HLLC Riemann solver application to Euler and magneto-hydrodynamic flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(6): 1970-1993.
- [23] Capdeville G. A high-order multi-dimensional HLL Riemann solver for non-linear Euler equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(8): 2915-2951.
- [24] Vides J, Nkonga B, Audit E. A simple two-dimensional extension of the HLL Riemann solver for hyperbolic systems of conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, 280: 643-675.
- [25] Mandal J C, Sharma V. A genuinely multidimensional convective pressure flux split Riemann solver for Euler equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, 297: 669-688.
- [26] Balsara D S. A two-dimensional HLLC Riemann solver for conservation laws: application to Euler and MHD flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, 231(22): 7476-7503.
- [27] Balsara D S. Three dimensional HLL Riemann solver for conservation laws on structured meshes; application to Euler and magnetohydrodynamic flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, 295: 1-23.
- [28] Toro E F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics third edition [M]. Berlin: Springer, 2009: 328.
- [29] Sun M, Takayama K. An artificially upstream flux vector splitting scheme for the Euler equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 189(1): 305-329.
- [30] Gottlieb S. On high order strong stability preserving Runge-Kutta and multi step time discretizations [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2005, 25(1): 105-128.
- [31] Mandal J C, Arvind N. High resolution schemes for genuinely two-dimensional HLLC Riemann solver [J]. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 2014, 14(4): 205-220.
- [32] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126(1): 202-228.
- [33] Schulz-Rinne C W, Collins J P, Glaz H M. Numerical

- solution of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics [J]. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 1993, 14(6): 1394-1414.
- [34] Quirk J. A contribution to the great Riemann solver debate [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1994, 18(6): 555-574.
- [35] Liou M S. Mass flux scheme and connection to shock instability [J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 160(2): 623-648.
- [36] Xu K. Gas-kinetic schemes for unsteady compressible flow simulations [R]. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series*, 1998, 03: 1-10.
- [37] Dumbser M, Moschetta J M, Gressier J. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon [J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 197(2): 647-670.
- [38] Moschetta J M, Gressier J, Robinet J C, et al. The carbuncle phenomenon: A genuine Euler instability? [A]. // *Godunov methods, theory and applications* [M]. New York: Springer US, 1995: 639-645.
- [39] Wu H, Shen L J, Shen Z J. A hybrid numerical method to cure numerical shock instability [J]. *Communications in Computational Physics*, 2010, 8(5): 1264-1271.
- [40] Woodward P R, Colella P. The numerical simulation of two dimensional fluid flow with strong shocks [J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, 54(1): 115-173.

作者简介:

胡立军(1985-) 男,湖南常德,博士生,中国科学院数学与系统科学研究院,从事流体力学数值方法的研究. 通信地址:北京市海淀区中关村东路 55 号(100190). E-mail: hulijun@lsec.cc.ac.cn.

袁礼(1963-) 男,重庆永川,研究员,博士生导师,中国科学院数学与系统科学研究院,从事流体力学数值方法的研究. 通信地址:北京市海淀区中关村东路 55 号(100190). Email: lyuan@lsec.cc.ac.cn.