中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01 习题 13

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2014 年 12 月 27 日，8:00-9:40

作业 1. 求不定积分:

(a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

(b) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

(c) $\int x^x(1+\ln(x))dx$

(d) $\int \sinh^3(x)dx$

作业 2. 请问, 在什么情况下, 不定积分

$$\int \sqrt{1+x^q}dx$$

(式中 q 是有理数) 是初等函数?

作业 3. a) 试证: 微分二项式的积分 $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ (其中 m,n,p 是有理数) 可归结为积分

$$\int (a+bt)^p t^q dt,$$

其中 p,q 是有理数.

b) 如果 $p,q,p+q$ 这三个数中有一个是整数的话, 上述积分就可以用初等函数表示. (切比雪夫证明, 除了这种情形, 上述积分不能用初等函数表示.)

作业 4. 设 $f'(x^2)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$, 求 $f(x)$.

作业 5. 求下列非初等的特殊函数的原函数, 精确到线性函数 $Ax+B$:

a) $\mathrm{Ei}(x)=\int \frac{e^x}{x}dx$ (积分指数)

b) $\mathrm{Si}(x)=\int \frac{\sin x}{x}dx$ (积分正弦)

c) $\mathrm{Ci}(x)=\int \frac{\cos x}{x}dx$ (积分余弦)

d) $\mathrm{Shi}(x)=\int \frac{\sinh x}{x}dx$ (积分双曲正弦)

e) $\mathrm{Chi}(x)=\int \frac{\cosh x}{x}dx$ (积分双曲余弦)

f) $\mathrm{S}(x)=\int \frac{\sin x^2}{x}dx$ (菲涅耳积分)

g) $\mathrm{C}(x)=\int \frac{\cos x^2}{x}dx$ (菲涅耳积分)

h) $\Phi(x)=\int e^{-x^2}dx$ (欧拉-泊松积分)

i) $\mathrm{li}(x)=\int \frac{dx}{\ln x}$ (积分对数)

作业 6. 形如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$$

的微分方程叫做变量分离的方程, 我们可以把它改写成 $g(y)dy=f(x)dx$, 这里变量 x 和 y 已被分开. 分开变量之后就可以分别计算原函数而解出方程:

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx+c.$$

试解方程:

a) $2x^3yy'+y^2=2$. b) $xyy'=\sqrt{1+x^2}$.

c) $y'=\cos(y+x)$, 令 $u(x)=y(x)+x$.

d) $x^2y'-\cos 2y=1$, 并挑出当 $x\to+0$ 时满足条件 $y(x)\to 0$ 的解.

e) $\frac{1}{x}y'(x)=\mathrm{Si}(x)$. f) $\frac{y'(x)}{\cos x}=\mathrm{Ci}(x)$.

作业 7. 利用黎曼积分的定义, 求

(a) $\int_0^1 xdx$

(b) $\int_{-1}^2 x^2dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)dx$

作业 8. 证明黎曼函数

$$R(x):=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{如果}x\in\mathbb{Q},\ n\text{ 是}x\text{表示为}\frac{z}{n}\text{的最小正整数}n\\ 0 & \text{如果}x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上是黎曼可积的.

作业 9. 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 则 $|f(x)|$ 在该区间上也是黎曼可积, 而且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx.$$

当堂小测验 3

测验 1. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})$.

测验 2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x)dx=0$, $\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$. 试证明在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同得点 ξ_1,ξ_2 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

解答作业 1. (a) 令 $y=\sqrt{x}$, $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int \frac{dy^2}{1+y}=\int \left(2-\frac{2}{1+y}\right)dy=2y-2\ln|1+y|=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$.

(b) 令 $\sqrt{x^2+x+1}=-x+t$, 则有 $x^2+x+1=x^2-2xt+t^2$, 于是 $x=\frac{t^2-1}{1+2t}$, $dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt$, 从而 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt=2\ln|t|+\frac{3}{2(2t+1)}-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+C$.

(c) 令 $y=x^x$, 则 $\ln y=x\ln x$, 两边求导 $y'_x/y=1+\ln x$. 于是 $\int x^x(1+\ln x)dx=\int y(y'_x/y)dx=y+C=x^x+C$.

(d) $\int \sinh^3(x)dx=\int(\cosh^2(x)-1)d\cosh(x)=\frac{\cosh^3(x)}{3}-\cosh(x)+C$.

解答作业 2. 二项式 $\int x^{p_1}(a+bx^{p_2})^{p_3}$ 中, $p_1=0$, $a=1$, $b=1$, $p_2=q$, $p_3=\frac{1}{2}$ 根据切比雪夫定理, $q=1/N$, $q=2/(2N-1)$ 时, 不定积分是初等函数.

解答作业 3. $\int x^m(a+bx^n)^p dx=\int(a+bt)^p t^{m/n}dt^{1/n}=\frac{1}{n}\int(a+bt)^p t^q$, 其中 $q=(m-n+1)/n$. 由切比雪夫定理, 及 $p_2=1$, 可得 (b), 证毕.

解答作业 4. $f'(x)=1/\sqrt{x}$, 所以 $f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$.

解答作业 5. a) $\int \mathrm{Ei}(x)dx=x\mathrm{Ei}(x)-e^x+(Ax+B)$;

b) $\int \mathrm{Si}(x)dx=x\mathrm{Si}(x)+\cos x+(Ax+B)$;

c) $\int \mathrm{Ci}(x)dx=x\mathrm{Ci}(x)-\sin x+(Ax+B)$;

d) $\int \mathrm{Shi}(x)dx=x\mathrm{Shi}(x)-\cosh x+(Ax+B)$;

e) $\int \mathrm{Chi}(x)dx=x\mathrm{Chi}(x)-\sinh x+(Ax+B)$;

f) $\int \mathrm{S}(x)dx=x\mathrm{S}(x)+\frac{1}{2}\cos x^2+(Ax+B)$;

g) $\int \mathrm{C}(x)dx=x\mathrm{C}(x)-\frac{1}{2}\sin x^2+(Ax+B)$;

h) $\int \Phi(x)dx=x\Phi(x)+\frac{1}{2}e^{-x^2}+(Ax+B)$;

i) $\int \mathrm{li}(x)dx=x\mathrm{li}(x)-\int \frac{xdx}{\ln x}$ 令 $t=\ln x$, $x=e^t$, 则有 $\int \mathrm{li}(x)dx=x\mathrm{li}(x)-\int \frac{e^{2t}}{2t}d(2t)=x\mathrm{li}(x)-\mathrm{Ei}(2\ln x)$.

解答作业 6. a) $\frac{dy^2}{2-y^2}=\frac{dx}{x^3}$, 于是 $-\ln|2-y^2|=-1/(2x^2)+C$.

b) $ydy=\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2}dx^2$, 于是 $\frac{y^2}{2}=\int \frac{td(t^2-1)}{2t^2-2}=\int \frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C$.

c) 令 $u(x)=y(x)+x$, $\frac{du}{1+\cos u}=dx$, 令 $t=\tan\frac{u}{2}$, 我们可以得到 $x=\int \frac{1+t^2}{2t^2}d(2\arctan t)=\int \frac{1}{t^2}dt=t+C=-\tan\frac{y+x}{2}+C$.

d) $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{1+\cos 2y}$, 同上, 令 $t=\tan y$, 于是 $-\frac{1}{x}=-\frac{1}{2t}=\tan y/2+C$.

e) $dy=x\mathrm{Si}(x)dx$, $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}+Ax+B$.

f) $dy=\mathrm{Ci}(x)\cos xdx$, $y=\int \mathrm{Ci}(x)d\sin x=\mathrm{Ci}(x)\sin x-\int \sin xd\mathrm{Ci}(x)=\mathrm{Ci}(x)\sin x-\int\frac{\sin x\cos x}{x}dx+Ax+B=\mathrm{Ci}(x)\sin x-\int\frac{\sin 2x}{4x}d2x+Ax+B=\mathrm{Ci}(x)\sin x-\frac{1}{2}\mathrm{Si}(2x)+Ax+B$.

解答作业 7. (a) $\sum(x_i+\Delta_i/2)\Delta_i=\sum\frac{(x_i+\Delta_i)^2}{2}-\frac{x_i^2}{2}=1/2$. (b) 3. (c) 1.

解答作业 8. 对任意 $\epsilon\in(0,1/2)$, 使得 $R(x)=R(q/p)=1/p>\epsilon$ 的 x 在 $(0,1)$ 上只有有限个, 记为 N, 将区间 $[0,1]$ 作划分, 使得每一个子区间长度小于 ϵ/N, 因此对任意划分 $\sum\omega(f;\Delta_i)\Delta_i<\epsilon/N*N+\epsilon*1=2e$. 证毕.

解答作业 9. 利用 $||a|-|b||\le|a-b|$, 及黎曼积分的引理 7.1.7, 证毕.

解答测验 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}})=\int_0^1\sqrt[3]{x}dx=3/4.$

解答测验 2. 首先存在 $\xi_1\in(0,\pi)$, 使得 $\int_0^\pi f(x)dx=f(\xi_1)(\pi-0)=0$. 于是 $f(\xi_1)=0$. 假设还有另一个点 ξ_2 使得 $f(\xi_2)=0$, 证毕. 否则 $f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 和 (ξ_1,π) 内异号, 不妨设前者区间内 $f(x)>0$, 后者区间内 $f(x)<0$. 由 $\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0$ 和 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 内的单调性可知 $0=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx=\int_0^{\xi_1}(\cos x-\cos\xi_1)dx+\int_{\xi_1}^\pi(\cos x-\cos\xi_1)dx>0.$