

瀑布型多重网格法

首先,瀑布型多重网格法是近年来刚兴起的一种解大型线性代数方程组的有效算法,与目前流行的一般多重网格法相比,它不需要校正过程,每次只需要进行从粗到细迭代,计算量小,流程统一,便于应用。我们对瀑布型多重网格法提出一个统一的理论框架,可以处理多种协调和非协调元,二阶和四阶椭圆问题,以及抛物问题,成果得到国内外同行的一致好评。

我们研究了 P1, Morley 元、Mortar 元法的多重网格法,这是一个相当困难的研究课题,因为除了通常非协调元固有的困难外,还加上了由于网格非匹配引起的困难,我们给出了一个最优的多重网格格式和预处理方法。已有的非协调元 V-循环多重网格法要求粗细网格上光滑迭代足够多次,才能保证收敛。我们提出了只需每层光滑一次就能保证收敛的新的有效算法。这些结果目前是 V 循环多重网格法最好的结果。这些成果发表在国外最顶尖的杂志上。对整个学科的发展起到了很好的推动作用。

对板问题 (R-M), 我们给出了一些实际应用背景很强, 计算简单的 Loking 自由的板元, 建立了完善的数学基础。这些成果得到了国内外同行的广泛好评。

移动网格方法研究的实际应用

(1) 网格发生缠绕是移动网格方法不容易实现的一个关键问题, 需要使用移动网格方法求解的问题一般奇性比较大, 网格的构造如果不够稳健, 网格发生缠绕在所难免。我们首先选择逻辑区域和物理区域之间的调和映照构造网格, 在理论上保证了精确的网格的存在唯一性; 但是这个映射尽管在理论上是个一一映射, 它常常很接近于一个奇异的映射, 因此在很小的数值误差下, 它的离散表示就成为奇异的, 引起网格的缠绕, 我们通过数值上引进了一个迭代过程, 使得这种数值误差可能带来的缠绕得以避免, 从而比较完整的解决了网格缠绕的问题;

(2) 网格发生了移动以后, 我们需要将数值解从旧网格更新到新的网格上面, 一般的多项式插值格式如果不是精度上不能满足要求, 就是可能带来数值振

动，被证明是不能完成这个工作的，我们利用新旧网格具有相同的结构的特点，将网格的移动当成一个人工的流场，将网格间的插值转化为求解一个对流方程，这样，网格移动和方程求解完全分离，消除了他们耦合在一起时的非线性现象，得到的格式稳定性好，易于实现，而且能够灵活的选择精度和方程本身的求解相耦合；

(3) 对于很多问题，因为数值解的误差常常和解的各阶导数联系在一起，我们可以通过经验构造指导网格移动的控制函数，但是实践中也存在很多简单经验控制函数不适用的问题，尤其是当问题是非线性的时候，可能出现解的误差对导数不敏感的现象，或者是解的误差依赖于高阶导数，但是数值解的该高阶导数没有精度的现象，对于这样的情形，我们研究了将后验误差转换成为一个度量来构造控制函数的方法；

(4) 以前的方法，网格在内部和边界上的移动都是分开来进行考虑的，这样做的问题是内部和边界上没有信息交换，得到的网格在特定的情况下比边界上使用固定的网格时的结果更差，我们将原先的网格移动的格式改造成为一个具有线性约束的泛函极小问题，发展了一个将边界和内部耦合的整体网格移动格式，使得边界和内部能够统一处理，得到的网格具有内蕴的合理性；

我们将上面的整体的移动网格方法在三维的情况进行了实现，并对刚性很强的小黏性的 Burgers 方程，反应扩散方程等算例得到成功的数值结果，三维的移动网格方法的结果在文献中是很罕见的；

本课题组在项目的实施过程中还将基础计算方法的创新和发展与解决国民经济和国防建设的重大问题的实际需求相结合，在若干重大问题的应用中做出了贡献。例如：

刘光鼎院士说“像大庆油田和胜利油田这样的主力油田需要用叠前深度偏移技术解决地质体的勘探问题，地质地球物理在冯康学学术思想指导下发展了哈密

尔顿辛几何叠前深度偏移技术”。当时，世界上流行的是 Kirckhoff 积分方法，但此方法受射线追踪的局限，成像差，更不能使振幅得到保持。我们发展出哈密尔顿系统辛几何的叠前深度偏移技术，进而取得李群算法。辛几何算法及李群算法为油气勘探二次创业的前导研究，已取得重大成果，它深化了哈密尔顿体系的震波传播及成像的辛算法研究，生成的“油储地球物理资料与信息处理系统”经受了大庆油田 10 m³ 天然气储量任务的考验。该算法也在大庆徐家围子地区试用成功。上述算法在实际应用中得到广泛好评。

我们针对我国国防建设具有重要意义一类辐射辐射流体力学方程组中的二维能量方程组利用代数多重网格法 (AMG) 所设计的算法，已成功应用于求解实际的辐射流体力学方程组。经北京应用物理与计算数学研究所有关专家的评价，该方法在计算效率和鲁棒性等方面取得了明显效果，适用于实际的二维能量方程组的大规模求解。

关于几种应用问题所设计的 AMG 法具有重要的实用价值，例如，我们所设计的关于二维能量方程组的 AMG 法，已成功应用于求解实际的辐射流体力学组，该方程组的数值模拟对我国国防建设具有重要意义；另外，我们还将 AMG 法应用于岩石力学问题，对于解决岩石力学工程实践中不断出现的大规模科学计算问题，提高岩石力学有限元数值模拟的效率、精度以及相应工程领域的管理决策水平，具有较大科学和技术经济意义。