

学科门类: 工 学  
中图分类号: 035

单位代码: 90009  
密 级: 公开

硕士研究生学位论文

# 一维浅水模式初边值和参数反演

一级学科: 力 学

学科专业: 流 体 力 学

研究方向: 流体力学中的反问题

培养院所: 气 象 学 院

研 究 生: 潘 小 强

指导教师: 黄 思 训 教 授

中国人民解放军理工大学

二 0 0 三 年 五 月

## 摘要

本文利用偏微分方程组 (PDEs) 最优控制中伴随方法对一维浅水模式的初边值以及模式参数在整体和局部资料下进行反演; 为进行数值计算, 从正问题的离散计算格式出发构造离散变分伴随系统; 通过数值试验来验证理论分析的可靠性。

首先利用偏微分方程最优控制中伴随方法对一维浅水模式最优初值的反演进行理论分析, 先后导出了连续形式和离散形式的变分伴随模式。接着, 做了基于整体观测资料的数值试验。在对局部观测资料进行数值试验时, 引入正则化方法, 构造稳定泛函。其目的是为了避开由于观测资料不完整造成计算不稳定或者迭代速度缓慢、精度不高等缺陷。随后再做的数值试验结果表明: 作为求解以不适定性为主要特征的反问题技巧之一, 把正则化技术引入到模式反演中是明智的和卓有成效的。接下来的主要工作是对最优初值条件、开边界条件和模式参数 (底摩擦系数) 联合反演的变分伴随系统进行理论分析。开边界条件反演数值试验取得了满意的效果。对模式参数反演数值试验效果不理想, 我们对此做了必要的说明。尽管还有许多未尽的工作, 作为一种求解数学物理反问题的方法, 伴随方法对浅水模式进行反演研究是可行的和有效的。

**关键词:** 浅水模式; 变分伴随方法; 正则化方法; 反演;  
偏微分方程最优控制

**INVERSION OF INITIAL AND BOUNDARY  
CONDITIONS AND PARAMETER IN  
ONE-DIMENSIONAL SHALLOW WATER MODEL**

**ABSTRACT**

This article highlights theoretical aspects of inversion of shallow water model by using of variational adjoint technique whose feasibility was tested by some individual numerical experiments in the later part of the article. Through integrating by part the variational equality that we formed beforehand, we, once for all, deduced the variational adjoint formalisms with continuous and discrete form that would be utilized to inversely estimate the optimal values of initial value conditions, open boundary value conditions and bottom frictional coefficient in the dynamical model (or direct problem). One should take more care when dealing with the discrete form because of the inevitable effects of the computational scheme for the direct problem. The numerical experiments on the estimation of the optimal initial value conditions are very successful, especially when the regularization technique introduced in the case of local observed data. After doing numerical experiment on estimating both open boundary value conditions and initial value conditions, we found that the former is pretty well while the later is just so-so. Although the estimation of the optimal bottom frictional coefficient is far from pretty, we still can see that as one of weapons used to conquer inverse problems the variational adjoint technique is suitable and practicable in dealing with inversion of one-dimensional shallow water model.

**Pan Xiaoqiang (Hydrodynamics)**  
**Directed by Professor Huang Sixun**

**Keywords:** shallow water models, variational adjoint methods, regularization techniques, inversions, optimal control to partial differential equations

## 目 录

摘要 .....	i
ABSTRACT .....	ii
第 1 章 绪论 .....	1
§ 1.1 研究背景和意义 .....	1
§ 1.2 研究概况和进展 .....	2
第 2 章 相关技术领域的介绍 .....	4
§ 2.1 数学物理反问题 .....	4
§ 2.1.1 反问题的数学表述 .....	4
§ 2.1.2 反问题的不适定性和正则化方法 .....	6
§ 2.2 偏微分方程最优控制中的伴随方法 .....	7
§ 2.2.1 伴随方法的理论依据 .....	7
§ 2.2.2 伴随方法的实际操作 .....	9
第 3 章 反演方法理论分析 .....	11
§ 3.1 概述 .....	11
§ 3.2 变分伴随方法的理论分析 .....	13
§ 3.2.1 连续系统变分伴随分析 .....	13
§ 3.2.2 离散系统变分伴随分析 .....	17
§ 3.3 数值计算方案 .....	21
第 4 章 数值试验 .....	23
§ 4.1 预处理过程 .....	23
§ 4.2 数值试验结果 .....	25
§ 4.3 结果分析 .....	39
第 5 章 结论和问题 .....	41
§ 5.1 结论 .....	41
§ 5.2 亟待解决的问题 .....	42
在学期间的研究成果 .....	43
致 谢 .....	44
参考文献 .....	45
附录：记号索引 .....	49

## 第 1 章 绪论

### § 1.1 研究背景和意义

数学物理反问题最显著的特性是不适定性 (*ill-posedness*) 和非线性性, 而通常的数值方法对其往往失效。长期以来, 人们始终没有找到处理反问题的有效方法。前苏联数学家 *Tikhonov* 通过近二十年的研究, 提出了正则化方法 (*regularization technique*)<sup>[3, 5~6]</sup>, 为反问题研究和数值计算开辟了一条崭新的道路。从此, 一门涉及多个领域 (数学物理方法、最优控制、数值计算和计算机技术等) 的新兴交叉学科诞生了。数学物理反问题研究各种物理现象的逆过程。这首先要将物理现象抽象成某种数学模型, 然后用它来对物理过程本身或它的载体进行定量分析、过程控制、参数提取或者对实体进行重新设计和改造。因此, 各种反问题就是如何根据具体物理问题和实际可提供的结果来给出准确的数学模型, 并研究在这些非典型条件下数学物理方程的定解问题。1987 年, 以“反问题、反演法和数据反演计算”为主要内容的专题杂志创刊, 标志着反问题研究的独立和成熟。目前, 国际上已建立了工程反问题组织, 每年都举办各种形式的研讨交流活动。反问题研究已取得令人瞩目的进展。我国自 80 年代初, 由著名数学家冯康先生倡议, 开始进行反问题研究, 现已取得诸多理论研究和实际应用成果。我国著名专家栾文贵等人在地球物理、物性探测等领域中的研究成效显著。

在气象学和物理海洋学中, 科技工作者们开发了大量的用来描述复杂气候系统运行规律的数值模式。但这些数值模式是在一定的物理假设的基础上建立的, 它们只是对实际气候系统一定程度上的近似。也就是说数值模式与实际气候系统相比存在误差, 其主要来源是一些复杂的物理机制未加考虑以及某些物理参数不准确; 另外, 由于观测手段和精度的限制, 模式所需某些时次的观测资料缺乏, 使得数值预报的精度一直受到严重挑战。我们能够想到的解决问题的途径无非是两种: 一是不断研发高精度的观测仪器设备, 使观测精度不断提高, 为解非线性偏微分方程的初边值问题提供更多有效信息。这其实还是沿着解数学物理方程定解问题的方向, 或者说是沿着解正问

题的方向进行探索；另一种途经则是旨在解数学物理反问题，即充分利用模式解的观测值，通过一定的反演技术，确定最佳模式初边值以及物理参数，从而达到修正数值模式的目的。

浅水模式方程<sup>[18]</sup>是基于合理的物理假设的数学物理方程。本文利用变分伴随方法(*adjoint method*)<sup>[3~5, 11~17, 22~23, 28, 35, 37~38]</sup>，结合正则化方法，立足于一定观测资料，对动力模式方程中的初边值条件、物理参数进行反演。这项工作的重要意义不但在于可以为潮流数值模拟确定最优定解条件和合理的物理参数提供理论分析方法和数值实验范例，而且可以为水利工程、海港建设等方面的工程技术人员在设计、施工时提供可靠的技术支持。

## § 1.2 研究概况和进展

提为初值问题的数值预报模式在通过改进数值模式、观测资料以及分析方法而改进预报的同时，依然存在模式误差和初值不完整的缺陷。如何通过已经掌握的大量历史统计资料和实时观测资料，对模式初值条件反演确定其最优取值来订正模式误差，这方面的研究正越来越受到重视。范新岗和丑纪范(1999)针对数值模式误差和初值不完整这两个方面的缺陷给数值预报带来的困难，把问题归纳成三个类型<sup>[2]</sup>：模式有误差但初值完整、初值不完整但模式是精确的、初值不完整且模式有误差。他们还作为反问题提出的这三种问题类型进行了理论和算法方面的讨论，数值试验的结果说明了其方法的有效性。

潮流数值模拟中的一个主要难点在于开边界条件的确定，*Lardner*(1993)<sup>[30]</sup>、*Seiler*(1993)<sup>[44]</sup>、朱江等(1997)<sup>[17]</sup>曾对开边界条件的反演进行过研究，吕咸青等(1999)曾经利用伴随方法作了数值模拟实验<sup>[12]</sup>。该工作就如何应用水位资料来反演矩形海域的开边界条件进行了探讨，所作的一系列数值模拟实验表明：在深度平均的潮流模型中，利用偏微分方程最优控制中的伴随方法能够将矩形海域的开边界条件成功地反演出来。韩桂军等(2001)通过建立伴随模式，把黄海、东海潮流观测资料拟合到大陆架海域潮流数值模式中去，优化了开边界条件<sup>[4]</sup>，提高了数值预报的精度。

*YU*等通过利用优化技术将海洋观测资料拟合到海洋 *Ekman* 模型中<sup>[49]</sup>，他们所做的数值试验表明：对于未知边界条件和模式参数的联合反演是卓有

成效的。不过，这项工作中采用的是十层的海洋观测资料。在此基础上，吕咸青等<sup>[13]</sup>也做了同样的工作，而他们只用了表层及次表层的海洋观测资料，目标函数、梯度模和数据差异在有限步迭代内都有明显下降。

*Courtier*(1986,1987)最早用伴随方法对浅水模式进行过参数反演。*Stauffer* 和 *Bao*(1993)又对一维线性浅水模式的张弛逼近系数(*nudging coefficient*)进行了反演<sup>[45]</sup>。*Wergen*(1992)做了一维线性浅水模式的初值和一系列强迫项参数的反演工作<sup>[48]</sup>，他指出：即使观测资料存在一定的“噪声”，数据拟合的最终效果依然能够达到可接受的程度。在物理海洋研究领域，*Bennett* 和 *McIntosh*(1982)以及 *Prevost* 和 *Salmon*(1986)都分别做了基于最优控制理论的反演问题的早期研究工作<sup>[40]</sup>。*Panchang* 和 *O'Brien*(1989)用伴随方法对一个海峡潮流模型进行了底摩擦系数的反演<sup>[39]</sup>。*YU* 和 *O'Brien*(1991)还对风应力拖曳系数和涡黏度系数分布的反演进行了研究<sup>[49]</sup>。*Das* 和 *Lardner*(1990,1992)利用一个二维潮流模式反演了底摩擦项和水深<sup>[25-26]</sup>，他们还进一步对给定的网格分辨率，观测资料要达到什么样的要求才能得到较好的反演识别效果这样的问题进行了研究。最早指出参数识别所面临的困难和本质原因<sup>[41]</sup>的人是 *Richardson* 和 *Panchang*(1992)，他们用了一个反演涡黏度系数分布的例子说明了参数识别问题的计算不稳定性和解的非唯一性，并进一步指出这种特性随着参数在时空区域分布的不均匀和观测资料的噪声而表现得更加强烈。为了解决这一困难，他们建议不妨在目标函数(文中称为代价函数)的表达式中加入某些项，这样做的结果可能会使有噪声的观测资料和有误差的模式与反演解之间达到某种程度的“妥协”。这个建议随后得到了同行们的响应。比如：*Lardner* 和 *Song*(1995)就用这一思想改进了三维潮流涡黏度系数分布的反演工作<sup>[31]</sup>。不难看出，*Richardson* 和 *Panchang* 的建议其实就是“正则化”思想的一种应用，在物理海洋的模式反演研究领域里有着里程碑式的意义。

## 第 2 章 相关技术领域的介绍

### § 2.1 数学物理反问题

计算机技术的发展和计算方法的不断改进使得许多应用领域内正问题的求解已不再困难。而原来一些在没有计算机条件下的计算技巧则变得相形见绌。即使对一些非线性、时变或间断系数的微分方程，尽管解的适定性尚不清楚，也可通过大量试算求解。传感器与测量技术的飞速进步，使得许多由方程的解所描述的物理量，在某些区域可以实时地、足够精确地测量出来。加上物理模拟和数值计算方法的不断发展，就可以将正问题的分析与求解，通过实验与仿真解决。但恰恰是方程中常常被当作已知的物理量却很难被精确地实时测量。几类经典的数学物理方程都是在理想条件下的近似，仅仅能定性地解释一些物理现象。而当代计算机技术已深入到诸如控制、测量、管理、生物医学、能源、地质勘探等技术领域，这就要求理论计算能够对实际起定量的（而不是定性的）指导作用。因此，模型应能符合各类复杂的实际对象，而这却不是仅仅依靠数学和物理的理论分析就能解决的。求解数学物理反问题的目的正是为了通过对不精确模式方程定解条件以及物理参数的反演识别来订正模式，为求解正问题提供更精确的数值模式。

#### § 2.1.1 反问题的数学表述

一般地，数学物理反问题可以这样提出：设  $D$  为  $n$  维空间的连通开域，系统模型的一般形式为

$$L(\mu, Q) = M(f), \quad x \in \Omega. \quad (2.1)$$

式中， $x = (x_1, \dots, x_n)$  是  $n$  维空间的向量，其中的某个分量可以代表时间； $Q$  是系统的状态变量，其中可测量出的部分称为输出； $\mu$  是模型中待求的物理参数，是系统的内因，一般是介质特性的函数； $f$  是系统的输入（包括初边

值条件输入、外源作用等)。  $Q$ 、 $\mu$ 、 $f$  都是  $x$  的函数，也都可以是向量函数。 $L$  与  $M$  都是作用在  $\Omega$  (或其边界) 上的微分算子。 $M$  的微分阶次总低于  $L$  对  $Q$  的微分阶次。上式包含了数学物理方程及其所有的初边值条件。

假定  $\mu$ 、 $f$  属于某个容许函数类  $U_{ad}$ ，根据物理背景应从以下四个方面去定义  $U_{ad}$ ：

- 1) 函数的定义域：它可以是的部分区域或仅在某个低维子集合上（比如初边值条件）；
- 2) 函数所依赖的变元：可以仅依赖部分变元；
- 3) 函数的光滑性：将函数的定义域分为有限子域，在每个子域内足够光滑；
- 4) 函数的值域：实际中总是取有界闭域。

总假定任给  $\mu$ 、 $f \in U_{ad}$ ，代入式(2.1)中，总存在某种意义下适定的、与物理背景符合的广义解  $Q$ （因为容许函数类可以是间断的，经典解的定义已不再适合）。广义解的定义主要涉及在间断面上如何根据物理守恒定律给出解  $Q$  及其导数的连接条件。这些条件也就确定了  $Q$  属于哪类函数空间。这个求解过程称为**解正问题**，它是解反问题的前提。没有正问题的定性和定量的研究基础，提反问题就没有根据。

我们假定正问题已经解决，即已知  $\mu$ 、 $f$ ，则解  $Q$  全部可知。实际情况是： $\mu$ 、 $f$  的分量常常很难全部得知，区域  $D$  的边界也可能不确切，这是不利的方面；但是，我们也许能在  $\Omega$  的某个子集  $\Omega_s$  上测量得到解  $Q$  的某些信息（或给定某些要求），形式地表示为

$$N(\mu, Q) = h(x), \quad x \in \Omega_s. \quad (2.2)$$

式中， $N$  表示作用在  $Q$  和  $\mu$  上的微分算子，而且  $N$  中总是含有噪声。这样，我们就可以把解数学物理反问题表述成：利用式(2.2)从  $U_{ad}$  中确定  $\mu$ 、 $f$  的

未知分量，使得问题(2.1)完全定解。

### § 2.1.2 反问题的不适定性和正则化方法

求解数学物理反问题概括起来大概有三方面的困难：

- 1) 解反问题本质上是一个求微分运算，而计算机对于微分运算是脆弱的；
- 2) 由于反问题的不适定性(*ill-posedness*)，经典解的定义已不再适用，必须拓展解的定义。拓展后的广义解要能在超定条件下滤除噪声；在欠定条件下能够吸收其它信息；还能用于计算且计算结果稳定并与真实解接近。这是理论上的困难；
- 3) 求解计算量的巨大。

关于适定性(*well-posedness*)的概念<sup>[3, 47]</sup>，*J. Hadamard*(1923)是这样定义的：由度量空间 $U$  (具有度量 $\rho_u$ )中的“初始数据” $u$  来确定度量空间 $Z$  (具有度量 $\rho_z$ )中的解 $z = R(u)$  的问题称为在空间对 $(Z, U)$  上是适定的，如果满足：

- 1) 对每个 $u \in U$ ，都存在解 $z \in Z$  (**存在性条件**)；
- 2) 解唯一确定 (**唯一性条件**)；
- 3) 解在空间对 $(Z, U)$  上是稳定的，即对每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $\delta(\varepsilon) > 0$ ，使得对任意的 $u_1, u_2 \in U$ ，由 $\rho_u(u_1, u_2) \leq \delta(\varepsilon)$ 可导出 $\rho_z(z_1, z_2) \leq \varepsilon$ ，其中 $z_1 = R(u_1), z_2 = R(u_2)$  (**稳定性条件**)。

以上的三个条件中有任意一条不满足的问题就称为“**不适定问题**”。以下是几个不适定问题的例子：解第一类积分方程；对近似已知的函数进行微分运算；对于其系数在 $l_2$ 的度量中近似已知的*Fourier*级数数值求和；*Laplace*方程的*Cauchy*问题；函数的解析延拓问题；重力测定反问题等等。

反问题的不适定性从根本上讲是源于经典解的定义。我们知道在经典意义下求解方程，就是将某个函数的表达式代入方程，使之成为恒等式，则该函数表达式就是方程的解。这样做逻辑上是无可厚非的。而实际上，模型方程都经过了理想化的假定，它们只是对客观世界物理规律的某种程度的近

似。因而，实际应用中只能使方程式近似成立。克服反问题的不适定性大概有两个思路：

- 1) 通过对方程中的已知部分加强条件，使得按经典解的定义，求解具有适定性；
- 2) 适当修改解的定义，使得反问题的求解具有适定性。

正则化方法为解有着显著不适定性反问题提供了有效的途径，它是沿着上述第二个思路来实施的。在正则化方法中，稳定泛函实际代表了与某种猜测解之间的距离，而所谓正则化参数 $\alpha$ 则代表了原先定义的泛函和稳定泛函之间的权重因子。以 *Tikhonov* 正则化为例，目前常用的有两个选取正则参数的原则：偏差原则（*Morozov* 准则）和 *Arcangeli* 准则。恰如其分地选取正则化参数将促使近似解收敛到真解，详细的操作过程见有关文献<sup>[5,6]</sup>。

## § 2.2 偏微分方程最优控制中的伴随方法

近二十年来，在大气科学中提出了一个称之为“四维资料变分同化” (*four-dimensional variational data assimilation*)<sup>[5]</sup>的思想，即利用一切有效的信息，去估计出数值预报所需某时刻的大气状态值。运用变分方法把观测资料加以充分利用，通过非线性模式解与不同时次观测资料集的全局调整达到同化的目的。实际上，四维资料变分同化本质上就是偏微分方程最优控制中的变分伴随方法。

伴随方法在实施由动力模式和观测资料构造的泛函极小化过程来实现它的价值。这种最优控制方法使动力模式和观测资料之间建立起一种可信又客观的联系：由动力模式解拟合观测资料，而由观测资料优化动力模式的要素场和某些参数。伴随方法可以反演现有观测手段无法获取的某些信息。

### § 2.2.1 伴随方法的理论依据

变分伴随方法的实施过程可以描述为：定义一个标量函数，用以度量任意模式解同观测数据的偏差或距离。确定使该标量函数达到最小值的模式解称为最优解，同时，最优解还必须满足模式方程。这是典型的约束变分问题。*Thompson* (1969) 和 *Sasaki* (1970) 曾就这方面尝试过。不过由于动力模式方程

的高度复杂性，所求最小解的精度很低。

若方程的解由其对应初始条件唯一确定，则前述的约束变分问题可转化为无约束变分问题；对于流体力学偏微分方程组，对其最优控制的基本思想是把流体运动的演变看成初边值条件、模式参数的函数。用数学语言来表达，就是把流体运动方程组作为算子，流体各时刻的状态是该算子对初始场的映射，将不同时刻的观测场与流体动力模式从一定初始场得到的场进行比较，通过定义目标泛函  $J$  ( $J$  是初始场的泛函)，问题转为求使泛函极小的初始场的问题。于是将动力模式作为约束条件，通过不断调整初边值条件、模式参数，使目标泛函  $J$  达到最小。在求最优解的过程中，要求目标泛函对各调整参数（如初边条件、模式参数）的梯度。实际应用中，调整参数往往是复杂的且大量的，这样，迭代求解的计算量是巨大的，从而限制了此法在实际中应用。*Hoffman*(1986)曾用这种方法对一个简单的动力模式进行数值试验，结果表明计算量大得惊人。伴随方法正是在这样的背景下应运而生的。

伴随方法的优势在于模式的伴随方程可被用来显式地计算目标泛函对各调整参数的梯度。用梯度算法的每一次迭代，都要把动力模式沿时间维度向前积分一次，然后把切线性方程的伴随方程向后积分到初始时刻，从而得到所需的梯度。根据梯度算法的要求通过该梯度对调整参数进行修正后再重复前面的过程，直到使目标泛函达到极小（也可能是局部极小），得到的模式解即是所需的分析场。

实际数值计算中，调整参数需要不断改变以调整模式解，使之达到与观测场一致，一致的程度由目标函数值是否符合规定的某种评价标准来确定。如定义目标函数为

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m (x_i - x_i^{obs})^T W (x_i - x_i^{obs}) + (x_0 - x_b)^T B^{-1} (x_0 - x_b), \quad (2.8)$$

式中， $x_i$  是在时间层  $i$ 、观测  $x_i^{obs}$  的模式模拟解； $W$  为观测误差协方差（含观测误差和表示误差）矩阵的逆； $x_b$  是前一次分析结束时的分析值； $B$  为关系误差的协方差； $J$  是模式参数（如初值  $x_0$ 、边值条件和模式过程的一些附加参数）的函数，为了简明扼要，不妨设  $J = J(x_0)$ 。

$J$  越小, 模式与观测一致程度越高; 若分析的时段足够长, 包括足够观测资料确定  $x_0$ , 而没有隐含在  $x_b$  和  $B$  中的先前信息, 则(2.8)中第二项的作用相对来说微乎其微, 所以讨论时可以不加考虑, 这是唯一有效近似; 关于分析的时段并不是任意的。假如给定的模式是完善的, 若分析的时段超过了可预测时间, 则得到的分析可能与实际相差较远。假如考虑模式本身的误差, 则分析的时段不能超过模式能作出较好预测的时间, 但时段太短又不能发挥方法的优越性。最佳的分析时段需要通过试验来确定。

### § 2.2.2 伴随方法的实际操作

为了求解  $J(x_0)$  极小点, 迭代之初要给出  $x_0$  的初猜场  $x_0^0$ , 在每一次迭代后  $x_0^n$  由  $x_0^{n+1}$  取代, 即

$$x_0^{n+1} = x_0^n + (\rho d)^n, \quad (2.9)$$

其中,  $d$  表示下降方向, 简单地可以取为  $\nabla J(x_0^n)$  的负方向,  $\rho$  为迭代步长,  $n$  为迭代次数。如考虑动力模式方程:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \quad (2.10)$$

和目标函数 ( $x_b$  对  $J$  的影响被忽略)

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m (x_i - x_i^{obs})^T W (x_i - x_i^{obs}), \quad (2.11)$$

则  $J$  的一阶变分

$$\delta J = \sum_{i=0}^m (W (x_i - x_i^{obs}), \delta x_i), \quad (2.12)$$

而模式状态的扰动  $\delta x_i$  由切线性方程

$$\frac{d\delta x}{dt} = F'(t, x)\delta x \quad (2.13)$$

控制, 式中  $F'$  是  $F$  对  $x$  的 *Frechét* 导数<sup>[7]</sup>, 它是一个线性算子。如使用 *Euler*

时间方案，有

$$\begin{aligned}\delta x_i &= (I + \Delta t F'_{i-1}) \delta x_{i-1} \\ &= \cdots = (I + \Delta t F'_{i-1})(I + \Delta t F'_{i-2}) \cdots (I + \Delta t F'_0) \delta x_0,\end{aligned}\quad (2.14)$$

于是

$$\delta J = \left( \sum_{i=0}^m (I + \Delta t F'^*_{i-1})(I + \Delta t F'^*_{i-2}) \cdots (I + \Delta t F'^*_0) W(x_i - x_i^{obs}), \delta x_0 \right), \quad (2.15)$$

上式内积中求和部分表示梯度  $\nabla J(x_0)$ 。(2.13)的伴随方程为

$$-\frac{d\delta x}{dt} = F'^*(t, x)\delta x, \quad (2.16)$$

沿时间维度向后积分相应的有限差分格式可得到序列中的第  $i$  项。具体步骤如下：

1) 结合初始条件  $x_0$  从  $t_0$  到  $t_m$  积分动力模式(2.10)，储存每一时步的解

$$x_i (i = 0, 1, \dots, m);$$

2) 向后积分伴随模式(2.16)，从  $t_m$  到  $t_0$ ，从  $\delta x = W(x_m - x_m^{obs})$  开始，在每一时间步  $t_i$  加上  $\delta x$ ，大小为  $W(x_i - x_i^{obs})$ ，在  $t_0$  时，最后的  $\delta x$  就是梯度

$$\nabla J(x_0)。$$

需要说明的是由伴随模式来计算梯度可从原始模式通过变换得到，从而避免了繁琐的微分和离散形式伴随模式的推导过程，但有时为了导出伴随边界条件，这一推导过程是必不可少的，这一点稍后我们将会在对浅水模式的具体操作过程中看到。

## 第3章 反演方法理论分析

### § 3.1 概述

一维线性化浅水模式方程组可以表示成如下的偏微分方程定解问题<sup>[37]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + Ku = f(x, t), \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ (u, h)|_{t=0} = (u^0, h^0), & 0 \leq x \leq L, \\ u|_{x=L} = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ (u + \sqrt{\frac{g}{H}}h)|_{x=0} = D(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (3.1)$$

问题(3.1)就是与所研究反演问题相对应的正问题。式中,  $g$  表示重力加速度;  $H$  表示平均水深, 这里我们只考虑等深情况, 即  $H$  取为常数;  $D(t)$  不妨认为是开边界处的流体流量;  $u = u(x, t)$  表示铅直平均水平速度分量;  $h = h(x, t)$  为水位;  $u^0, h^0$  为模式初值;  $K = K(x)$  为底摩擦系数<sup>[18, 37]</sup>;  $f(x, t)$  代表外源强迫项。注意到模式中的所给的开边界条件被认为是“弱反射边界条件<sup>[37]</sup>”(weakly reflecting boundary conditions)。在固体边界 ( $x = L$ ) 处水位值没有给出, 而在人工边界或开边界 ( $x = 0$ ) 处两个状态变量之间构成了某种函数关系, 但是文[37]并未给出这样的人工边界是如何被推导出来的。设法给出物理上合理、数学上精确的开边界条件<sup>[16]</sup>, 对从事流体数值模拟研究的人员来说显得尤为重要, 我们这里只是直接引用现成的成果。对于上述双曲型微分方程的定解问题, 通过沿特征线积分, 可以证明: 如果给定初边值条件, 模式解是存在唯一的, 即正问题是适定的。相应的反演过程则是通过变分伴随分析导出伴随模式和梯度, 借助最优控制理论和算法, 不断调整模

式解使其与不同时次的观测资料达到最佳的拟合效果，同时确定最优初值条件、开边界条件和底摩擦系数。

针对问题的特点，通过把方程化为 *Riemann* 不变量形式\*构造“特征差分格式<sup>[9]</sup>”：

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = C_1 u_{j+1}^n + q_j u_j^n + C_1 u_{j-1}^n - C_3 h_{j+1}^n + C_3 h_{j-1}^n + \mathcal{F}_j^n, \\ h_j^{n+1} = C_1 h_{j+1}^n + C_6 h_j^n + C_1 h_{j-1}^n - C_2 u_{j+1}^n + C_2 u_{j-1}^n, \\ u_1^{n+1} = C_1 u_2^n + q_1 u_1^n - C_3 h_2^n + C_1 D^n + \mathcal{F}_1^n, \\ h_1^{n+1} = C_1 h_2^n + C_6 h_1^n - C_2 u_2^n + C_2 D^n, \\ u_{J-1}^{n+1} = C_1 u_{J-2}^n + q_{J-1} u_{J-1}^n - C_3 h_J^n + C_3 h_{J-2}^n + \mathcal{F}_{J-1}^n, \\ h_{J-1}^{n+1} = C_1 h_J^n + C_6 h_{J-1}^n + C_1 h_{J-2}^n + C_2 u_{J-2}^n, \\ h_0^{n+1} = C_5 h_0^n - C_2 u_1^n + C_1 h_1^n - C_7 D^n + C_8 D^{n+1} - C_4 f_0^n, \\ h_J^{n+1} = C_6 h_J^n + 2C_2 u_{J-1}^n + r h_{J-1}^n + 2C_4 f_J^n, \\ (j=1, \dots, J-1, n=0, \dots, N-1). \end{cases} \quad (3.2)$$

式中符号说明见附录。目标泛函定义为

$$\begin{aligned} J[u^0, h^0, K, D] &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L [w_1(x)(u - \bar{u})^2 + w_2(x)(h - \bar{h})^2] dx dt \\ &\quad + \frac{\beta^2}{2} \int_0^T \int_0^L [u + \sqrt{\frac{g}{H}} h - D(t)]^2 dx dt \end{aligned} \quad (3.3)$$

---

\* *Riemann* 不变量为  $r_1 = u + \sqrt{\frac{g}{H}} h$  和  $r_2 = u - \sqrt{\frac{g}{H}} h$ ，则(3.1)的前两式等价于

$$\begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial r_1}{\partial x} = f - K \frac{r_1 + r_2}{2}, \\ \frac{\partial r_2}{\partial t} - \sqrt{gH} \frac{\partial r_2}{\partial x} = f - K \frac{r_1 + r_2}{2}. \end{cases}$$

第一式表示沿着坐标轴正方向以速度  $\sqrt{gH}$  传播的波动，因而在开边界  $x=0$  处必须给出

$r_1|_{x=0} = u(0,t) + \sqrt{\frac{g}{H}} h(0,t)$ ；而第二式则表示沿着坐标轴负方向以同样速度传播的波动，因而由

初值  $r_2|_{t=0} = u(x,0) - \sqrt{\frac{g}{H}} h(x,0)$  就能确定  $r_2|_{x=0} = u(0,t) - \sqrt{\frac{g}{H}} h(0,t)$ 。

式中,  $w_1(x), w_2(x)$  为权重函数;  $\beta^2$  为正则化参数;  $\bar{u} = u^{obs}(x, t), \bar{h} = h^{obs}(x, t)$  代表历史统计资料或观测资料。目标泛函的这一表达式利用对正则化参数、权重函数的调整模拟出不同的情况:

- 1) 考虑引入正则化方法的情况:  $\beta \neq 0$ ;
- 2) 考虑局部观测资料的情况: 在某些格点处, 把权重函数值设为零值;
- 3) 考虑不等权重的情况: 把权重函数设为非常值函数。

### § 3.2 变分伴随方法的理论分析

在相关文献<sup>[4, 11~13, 17, 27]</sup>中, 一般都是首先构造 *Lagrange* 泛函, 把原先目标泛函极小化问题转化为对关于动力模式控制变数和 *Lagrange* 乘子的泛函极小化问题, 分别对 *Lagrange* 泛函求关于控制变数和 *Lagrange* 乘子的一阶变分将分别导致伴随方程和动力方程。但这样推导的伴随模式并没有充分考虑边界条件等因素的影响。有人<sup>[5]</sup>提出可以通过把动力方程线性化后的切线性方程来推导伴随方程, 并以涡度方程和浅水方程的伴随方程推导为例加以说明。不但如此, 他们还总结了几条用于写伴随方程的简便易行的原则, 根据这几条原则, 可以很容易把伴随方程写出来。不过由于篇幅所限, 书中并没有就带边界条件的动力模式方程如何推导其伴随方程和伴随边界条件给出具体的操作步骤。本文将力图弥补这个缺憾, 在充分考虑动力模式边界条件的基础上, 通过对构造出的变分等式分部积分, 在推导出伴随方程的同时伴随边界条件随之导出, 梯度计算式的导出更是水到渠成。这正是本论文在理论研究方面最显著的特点<sup>[28, 38]</sup>。

#### § 3.2.1 连续系统变分伴随分析

首先对动力模式中的各参量作线性扰动如下:

$$\begin{cases} u^0 \rightarrow u^0 + \alpha \hat{u}^0, \\ h^0 \rightarrow h^0 + \alpha \hat{h}^0, \\ K \rightarrow K + \alpha \hat{K}, \\ D \rightarrow D + \alpha \hat{D}, \end{cases}$$

$\alpha$  是任意固定的常数。相应地有模式状态变量的变化

$$\begin{cases} u \rightarrow \tilde{u} \\ h \rightarrow \tilde{h}. \end{cases}$$

把所得到的扰动模式和动力模式相结合就得切线性模式

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + K \hat{u} + \hat{K} u = 0, \\ \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + H \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = 0, \\ (\hat{u}, \hat{h}) \Big|_{t=0} = (\hat{u}^0, \hat{h}^0), \\ \hat{u} \Big|_{x=L} = 0, \\ (\hat{u} + \sqrt{\frac{g}{H}} \hat{h}) \Big|_{x=0} = \hat{D}(t). \end{cases}$$

(3.4)

根据定义，目标泛函  $J[u^0, h^0, K, D]$  在  $(u^0, h^0, K, D)$  处沿着方向  $(\hat{u}^0, \hat{h}^0, \hat{K}, \hat{D})$  的方向导数<sup>[7]</sup>表示为

$$\begin{aligned} & J'[u^0, h^0, K, D; \hat{u}^0, \hat{h}^0, \hat{K}, \hat{D}] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( J[u^0 + \alpha \hat{u}^0, h^0 + \alpha \hat{h}^0, K + \alpha \hat{K}, D + \alpha \hat{D}] - J[u^0, h^0, K, D] \right) / \alpha \\ &= \int_0^L [\nabla J(u^0) \hat{u}^0 + \nabla J(h^0) \hat{h}^0 + \nabla J(K) \hat{K}] dx + \int_0^T \nabla J(D) \hat{D} dt. \end{aligned}$$

(3.5)

另一方面，通过对表达式(3.3)求导得

$$\begin{aligned}
 J[u^0, h^0, K, D; \hat{u}^0, \hat{h}^0, \hat{K}, \hat{D}] &= \int_0^T \int_0^L [w_1(x)(u - \bar{u})\hat{u} + w_2(x)(h - \bar{h})\hat{h}] dx dt \\
 &+ \beta^2 \int_0^T \int_0^L [u + \sqrt{\frac{g}{H}}h - D(t)][\hat{u} + \sqrt{\frac{g}{H}}\hat{h} - \hat{D}(t)] dx dt
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

为了导出伴随边界条件，作变分等式

$$\int_0^T \int_0^L [(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + K\hat{u} + \hat{K}u)P + (\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + H \frac{\partial \hat{u}}{\partial x})Q] dx dt = 0. \tag{3.7}$$

上式中的  $(P, Q)$  代表与动力模式状态变量  $(u, h)$  对应的伴随模式状态变量。通过分部积分，(3.7)可化为

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \int_0^L [(-\frac{\partial P}{\partial t} - H \frac{\partial Q}{\partial x} + KP)\hat{u} + (-\frac{\partial Q}{\partial t} - g \frac{\partial P}{\partial x})\hat{h}] dx dt + \int_0^T \int_0^L Pu\hat{K} dx dt \\
 &+ \int_0^L [P\hat{u} + Q\hat{h}]|_{t=0}^{t=T} dx + \int_0^T [gP\hat{h} + HQ\hat{u}]|_{x=0}^{x=L} dt = 0.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

考虑到相关定解条件的扰动

$$\begin{cases} \hat{u}(x, 0) = \hat{u}^0, \hat{h}(x, 0) = \hat{h}^0, \\ \hat{u}(L, t) = 0, \\ \hat{u}(0, t) = \hat{D}(t) - \sqrt{\frac{g}{H}}\hat{h}(0, t). \end{cases}$$

并结合(3.5)、(3.6)和(3.8)可得

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_0^L \left[ -\frac{\partial P}{\partial t} - H \frac{\partial Q}{\partial x} + KP - w_1(x)(u - \bar{u}) - \beta^2 (u + \sqrt{\frac{g}{H}}h - D(t)) \right] \hat{u} dx dt \\
 & + \int_0^T \int_0^L \left[ -\frac{\partial Q}{\partial t} - g \frac{\partial P}{\partial x} - w_2(x)(h - \bar{h}) - \beta^2 \sqrt{\frac{g}{H}} (u + \sqrt{\frac{g}{H}}h - D(t)) \right] \hat{h} dx dt \\
 & + \int_0^L [P\hat{u} + Q\hat{h}]|_{t=T} dx + \int_0^T [gP\hat{h}|_{x=L} - (gP - \sqrt{gH}Q)h|_{x=0}] dt \\
 & = \int_0^L \hat{u}^0 [-\nabla J(u^0) + P(x,0)] dx + \int_0^L \hat{h}^0 [-\nabla J(h^0) + Q(x,0)] dx \\
 & + \int_0^L \hat{K} [-\nabla J(K) - \int_0^T P u dt] dx \\
 & + \int_0^T \hat{D} [-\nabla J(D) + HQ(0,t) - \int_0^L (u + \sqrt{\frac{g}{H}}h - D(t)) dx] dt,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

至此导出伴随模式

$$\begin{cases}
 -\frac{\partial P}{\partial t} - H \frac{\partial Q}{\partial x} + KP = w_1(x)(u - \bar{u}) + \beta^2 (u + \sqrt{\frac{g}{H}}h - D(t)), \\
 -\frac{\partial Q}{\partial t} - g \frac{\partial P}{\partial x} = w_2(x)(h - \bar{h}) + \beta^2 \sqrt{\frac{g}{H}} (u + \sqrt{\frac{g}{H}}h - D(t)), \\
 (P, Q)|_{t=T} = 0, \\
 P|_{x=L} = 0, \\
 (Q - \sqrt{\frac{g}{H}}P)|_{x=0} = 0.
 \end{cases} \tag{3.10}$$

和梯度计算式

$$\begin{cases} \nabla J(u^0) = P|_{t=0}, \\ \nabla J(h^0) = Q|_{t=0}, \\ \nabla J(K) = -\int_0^T P u dt, \\ \nabla J(D) = HQ|_{x=0} - \beta^2 \int_0^L (u + \sqrt{\frac{g}{H}} h - D(t)) dx. \end{cases} \quad (3.11)$$

### § 3.2.2 离散系统变分伴随分析

格式(3.2)可以等价地写成递推关系式

$$X^{n+1} = AX^n + B^n, \quad (n = 0, \dots, N-1). \quad (3.12)$$

根据定积分的定义, 离散形式的目标函数表达式写为

$$\begin{aligned} J[u^0, h^0, K, D] = & \frac{\sigma\tau}{2} \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{j=0}^{J-1} (w_1)_j (u_j^n - \bar{u}_j^n)^2 + \sum_{j=1}^J (w_2)_j (h_j^n - \bar{h}_j^n)^2 \right\} \\ & + \frac{\sigma\tau\beta^2}{2} \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^J (u_j^n + \sqrt{\frac{g}{H}} h_j^n - D^n)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

$J[u^0, h^0, K, D]$ 在 $(u^0, h^0, K, D)$ 处沿着方向 $(\hat{u}^0, \hat{h}^0, \hat{K}, \hat{D})$ 的方向导数<sup>#</sup>

$$\begin{aligned} & J'[u^0, h^0, K, D; \hat{u}^0, \hat{h}^0, \hat{K}, \hat{D}] \\ & = \sum_{j=1}^{J-1} \nabla J(u_j^0) \cdot \hat{u}_j^0 + \sum_{j=0}^J \nabla J(h_j^0) \cdot \hat{h}_j^0 + \sum_{j=0}^{J-1} \nabla J(K_j) \cdot \hat{K}_j + \sum_{n=0}^N \nabla J(D^n) \cdot \hat{D}^n \end{aligned} \quad (3.14)$$

另一方面, 由表达式(3.13)

<sup>#</sup> (3.13)的表达形式已经考虑了相容性条件。

$$\begin{aligned}
 & J[u^0, h^0, K, D; \hat{u}^0, \hat{h}^0, \hat{K}, \hat{D}] \\
 &= \sigma\tau \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{j=0}^{J-1} (w_1)_j (u_j^n - \bar{u}_j^n) \hat{u}_j^n + \sum_{j=1}^J (w_2)_j (h_j^n - \bar{h}_j^n) h_j^n \right\} \\
 &+ \sigma\tau\beta^2 \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^J (u_j^n + \sqrt{\frac{g}{H}} h_j^n - D^n) (\hat{u}_j^n + \sqrt{\frac{g}{H}} \hat{h}_j^n - \hat{D}^n) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

递推关系式(3.12)在扰动

$$\begin{cases} u_j^0 \rightarrow u_j^0 + \alpha \hat{u}_j^0, & (j = 0, 1, \dots, J-1), \\ h_j^0 \rightarrow h_j^0 + \alpha \hat{h}_j^0, & (j = 0, 1, \dots, J), \\ K_j \rightarrow K_j + \alpha \hat{K}_j, & (j = 0, 1, \dots, J-1), \\ D^n \rightarrow D^n + \alpha \hat{D}^n, & (n = 0, 1, \dots, N) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u_j^n \rightarrow \tilde{u}_j^n, \\ h_j^n \rightarrow \tilde{h}_j^n, \\ (j = 0, 1, \dots, J, \quad n = 1, 2, \dots, N) \end{cases}$$

的作用下成为

$$\tilde{X}^{n+1} = \tilde{A} \tilde{X}^n + \tilde{B}^n, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \tag{3.16}$$

结合递推关系式(3.12)和(3.16)可得递推切线性关系式

$$\hat{X}^{n+1} = A \hat{X}^n + E X^n + F^n, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \tag{3.17}$$

利用内积定义

$$\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i \tag{3.18}$$

(其中,  $a_i, b_i$  分别是同维的列向量  $a, b$  的第  $i$  个分量), 我们构造出变分递推式

$$\langle \hat{X}^n, W^{n-1} \rangle = \langle A \hat{X}^{n-1}, W^{n-1} \rangle + \langle E X^{n-1} + F^n, W^{n-1} \rangle, \quad (n = 1, 2, \dots, N). \tag{3.19}$$

我们知道矩阵的共轭算子<sup>[5]</sup>是其转置矩阵, 所以(3.19)又可写成

$$\langle \hat{X}^n, W^{n-1} \rangle = \langle \hat{X}^{n-1}, A^T W^{n-1} \rangle + \langle EX^{n-1} + F^n, W^{n-1} \rangle, \quad (n=1, 2, \dots, N). \quad (3.20)$$

这样就有

$$\sum_{n=1}^N \langle \hat{X}^n, A^T W^n - W^{n-1} \rangle + \sum_{n=0}^{N-1} \langle EX^n + F^n, W^n \rangle + \langle \hat{X}^0, A^T W^0 \rangle = 0, \quad (3.21)$$

其中,  $W^N$  是  $2J$  维全零列向量。考虑到

$$\begin{cases} \hat{u}_j^n = 0, \\ \hat{u}_0^n = \hat{D}^n - \sqrt{\frac{g}{H}} \hat{h}_0^n, \\ (n = 0, 1, \dots, N), \end{cases}$$

并结合(3.14)和(3.15)可得

$$\begin{aligned} & \sigma\tau \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{J-1} [(w_1)_j (u_j^n - \bar{u}_j^n) + \beta^2 (u_j^n + \sqrt{\frac{g}{H}} h_j^n - D^n)] \hat{u}_j^n \\ & + \sigma\tau \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J [(w_2)_j (h_j^n - \bar{h}_j^n) \hat{u}_j^n + \beta^2 \sqrt{\frac{g}{H}} (u_j^n + \sqrt{\frac{g}{H}} h_j^n - D^n)] \hat{h}_j^n \\ & - \sigma\tau \sum_{n=1}^N \sqrt{\frac{g}{H}} (w_1)_0 (u_0^n - \bar{u}_0^n) \hat{h}_0^n \\ & = \sum_{n=1}^N \left\{ \nabla J(D^n) - \sigma\tau (w_1)_0 (u_0^n - \bar{u}_0^n) + \sigma\tau \beta^2 \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n + \sqrt{\frac{g}{H}} h_j^n - D^n) \right\} \hat{D}^n \\ & + \sum_{j=1}^{J-1} \nabla J(u_j^0) \hat{u}_j^0 + \sum_{j=0}^J \nabla J(h_j^0) \hat{h}_j^0 + \sum_{j=0}^{J-1} \nabla J(K_j) \hat{K}_j + \nabla J(D^0) \hat{D}^0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

为了下文表述的方便, 这里我们定义  $2J$  维向量  $GI$  和向量序列  $M^n (n=1, 2, \dots, N)$  (见附录)。则(3.21)等价于

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \langle \hat{X}^n, A^T W^n - W^{n-1} \rangle + \langle \hat{X}^0, A^T W^0 \rangle \\
 & + \sum_{j=1}^{J-1} \left( -\tau \sum_{n=0}^{N-1} P_j^n u_j^n \right) \hat{K}_j + \hat{K}_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tau}{2} \left( \frac{1}{p} - h_0^n \right) Q_0^n \\
 & + \sum_{n=1}^{N-1} (C_1 P_1^n + C_2 Q_1^n + C_7 Q_0^n + C_8 Q_0^{n-1}) \hat{D}^n \\
 & + (C_1 P_1^0 + C_2 Q_1^0 + C_7 Q_0^0) \hat{D}^0 + C_8 Q_0^{N-1} \hat{D}^N = 0.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

另一方面, (3.22)等价于

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \langle \hat{X}^n, M^n \rangle + \langle \hat{X}^0, -GI \rangle \\
 & + \sum_{j=1}^{J-1} [-\nabla J(K_j)] \hat{K}_j + \hat{K}_0 [-\nabla J(K_0)] \\
 & + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ -\nabla J(D^n) + \sigma\tau(w_1)_0 (u_0^n - \bar{u}_0^n) - \sigma\tau\beta^2 \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n + \sqrt{\frac{g}{H}} h_j^n - D^n) \right\} \hat{D}^n \\
 & - \nabla J(D^0) \hat{D}^0 \\
 & + \left\{ -\nabla J(D^N) + \sigma\tau(w_1)_0 (u_0^N - \bar{u}_0^N) - \sigma\tau\beta^2 \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^N + \sqrt{\frac{g}{H}} h_j^N - D^N) \right\} \hat{D}^N \\
 & = 0.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

考虑扰动的任意性并结合(3.23)和(3.24), 最终得到用于对初值、边值和模式参数进行联合反演的离散变分伴随系统:

◇ 伴随递推式:

$$\begin{cases} W^N = 0, \\ W^{n-1} = A^T W^n - M^n, \\ (n = N, N-1, \dots, 1). \end{cases} \tag{3.25}$$

◇ 梯度计算式:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 GI = -A^T W^0, \\
 \nabla J(K_0) = -\frac{\tau}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{1}{p} - h_0^n \right) Q_0^n, \\
 \nabla J(K_j) = \tau \sum_{n=0}^{N-1} P_j^n u_j^n \quad (j = 1, 2, \dots, J-1), \\
 \nabla J(D^0) = -(C_1 P_1^0 + C_2 Q_1^0 + C_7 Q_0^0), \\
 \nabla J(D^N) = \sigma \tau (w_1)_0 (u_0^N - \bar{u}_0^N) - C_8 Q_0^{N-1} - \sigma \tau \beta^2 \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^N + \sqrt{\frac{g}{H}} h_j^N - D^N), \\
 \nabla J(D^n) = \sigma \tau (w_1)_0 (u_0^n - \bar{u}_0^n) - \sigma \tau \beta^2 \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n + \sqrt{\frac{g}{H}} h_j^n - D^n) \\
 \quad - (C_1 P_1^n + C_2 Q_1^n + C_7 Q_0^n + C_8 Q_0^{n-1}), \\
 (n = 1, 2, \dots, N-1).
 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

### § 3.3 数值计算方案

至此，整个反演系统理论框架的建立全部完成。我们的最终目标是考虑一维浅水模式方程的定解问题，认为它的初值条件、边值条件以及底摩擦系数都存在一定的误差。换句话说，把这些有误差的反演量代到动力模式方程中所求得的模式解与观测值还存在着较大的偏差（这里还没有考虑计算的舍入误差和观测资料误差）。为了能够使这种偏差减小到我们所预先规定的容许程度，有必要对所有的待反演量进行不断修正。优化和最优控制中的某些算法是我们进行这种修正的有效工具，其中需要通过计算目标函数对各反演量梯度的算法有最速下降法（一阶梯度）、共轭梯度法（二阶梯度或一阶梯度）等。它们各有自己的优势和缺陷<sup>[1, 7, 19]</sup>。本文的计算几乎都是采用这两种算法在 MATLAB 编程环境下完成的。为解决目标函数对各反演量的梯度计算问题，我们用到了伴随方法。从相关章节的表述中也可看出，推导伴随模式最终目的就是为了给出梯度计算式。综上所述，我们可以按照图 3.1 所给出的步骤来对一维浅水模式进行初值条件、开边界条件和底摩擦系数的反演进行数值计算试验（注：流程图中的  $m$  代表反演量的维数）。

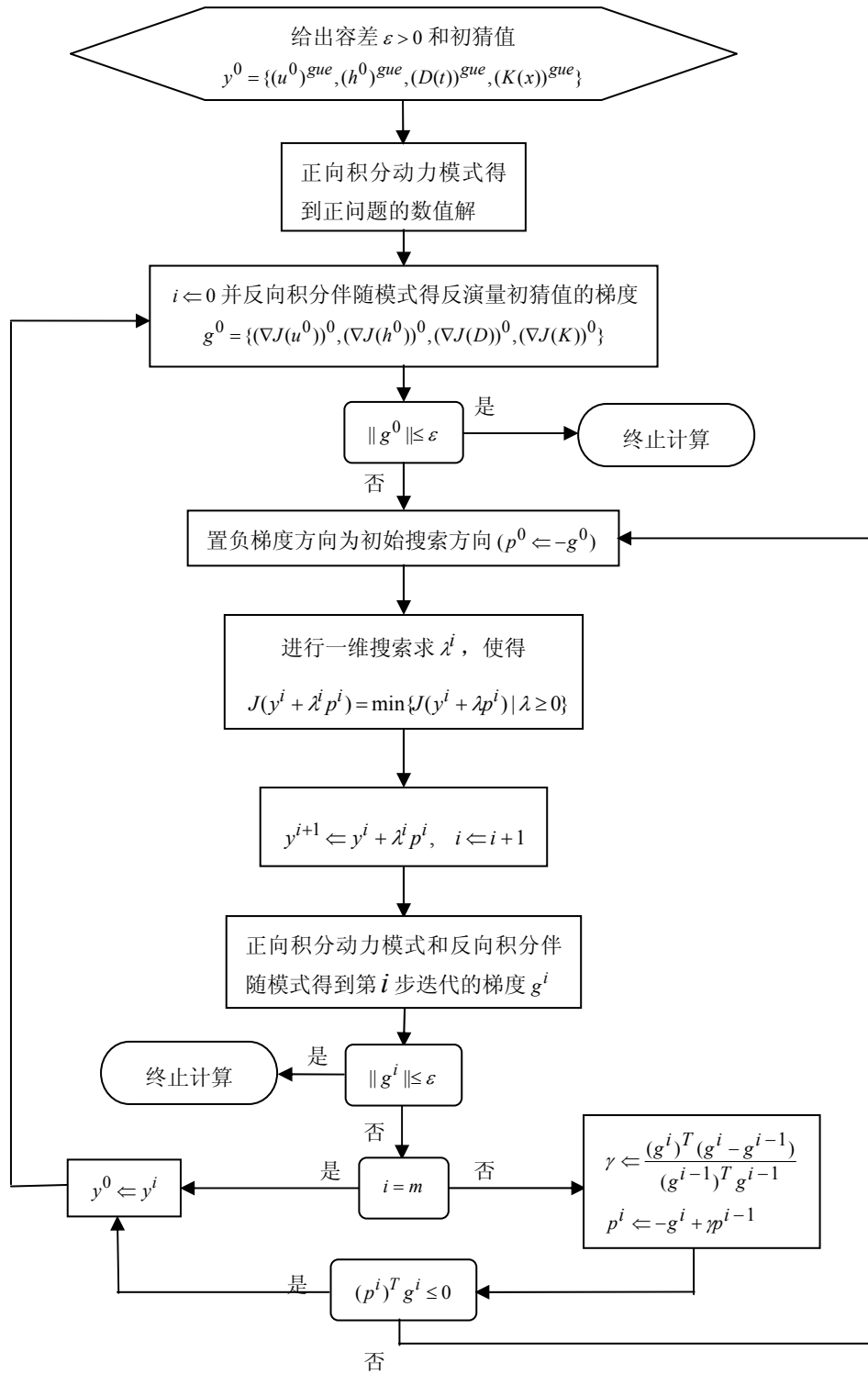


图 3.1 反演系统运行流程图

## 第 4 章 数值试验

### § 4.1 预处理过程

为了进行正问题的数值求解，我们给出参量设置<sup>①</sup>如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} g = 1.0, \quad H = 1.0, \\ T = 1.0, \quad L = 10.0, \\ N = 10, \quad J = 10, \\ K(x) = \frac{CK_1x^2 + CK_2}{L^2}, \\ D(t) = C_{10}e^{\frac{t}{T}}, \\ f(x, t) = (C_{11} + \frac{CK_1x^2 + CK_2}{L^2})e^{\frac{t}{T}} \sin \frac{\pi x}{L}, \\ u^0 = \sin \frac{\pi x}{L}, \\ h^0 = C_9 \cos \frac{\pi x}{L} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

由此得到正问题的解析解

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = e^{\frac{t}{T}} \sin \frac{\pi x}{L}, \\ h(x, t) = C_9 e^{\frac{t}{T}} \cos \frac{\pi x}{L}. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

我们就把这个解析解作为观测资料。各反演量初始猜测值通过对精确值加上一定形式的扰动形成（上角标 *gue* 代表它是猜测值）：

<sup>①</sup> 对于理想数值试验，无量纲化并不是必须的<sup>[37]</sup>。

$$\begin{cases} (u^0)^{gue} = \sin \frac{\pi x}{L} + p_u x + q_u, \\ (h^0)^{gue} = C_9 \cos \frac{\pi x}{L} + p_h x + q_h, \\ D^{gue} = C_{10} e^{\frac{t}{T}} + CD_1 t + CD_2, \\ K^{gue} = \frac{CK_1 x^2 + CK_2}{L^2} + CK_3 x + CK_4. \end{cases} \quad (4.3)$$

数值试验中，各个扰动参量的取值原则上是任意的，但过大或过小的扰动都不能反映问题的主要方面，下面的数值试验都统一遵循这样的扰动参量设定：

$$\begin{cases} p_u = L^{-1}, \quad q_u = 1.0, \\ p_h = L^{-1}, \quad q_h = 1.0, \\ CD_1 = 1.0, \quad CD_2 = 1.0, \\ CK_1 = 1.0, \quad CK_2 = 1.0, \\ CK_3 = 0, \quad CK_4 = 1.0. \end{cases} \quad (4.4)$$

另外，为了实时地把迭代过程中各反演量与其精确值之间的数据差异反映出来，要定义误差表示形式。在以下的各个数值试验中，一律对误差向量的分量总体取均方差来表示当前迭代次数所对应的数据差异。梯度模采用 2 范数( $\|\cdot\|_2$ )形式。

希望用图线表示的各个数值试验结果能显现出以下几方面的特点：

- 1) 目标函数、梯度模和数据差异随迭代进程同步下降，最终确定的最优值远离初始猜测值向精确值逼近；
- 2) 局部资料下反演时，通过适当选取正则化参数，使原先迭代缓慢、反演精度低的情形得到有效改善；
- 3) 对于联合反演的情形，各反演效果评价指标依然收敛到可接受的程度。

## § 4.2 数值试验结果

## 1) 试验一（整体资料下初值反演）

$$w_1(x) = 2\left(\frac{2x}{L} - 1\right)^2, w_2(x) = 5.0$$

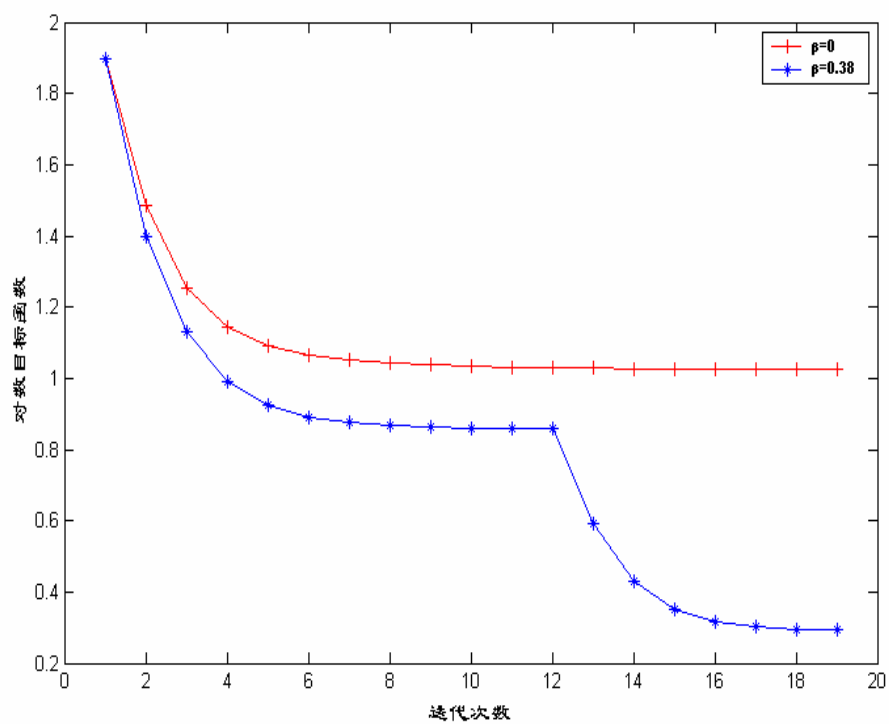


图 4.1 试验一目标函数随迭代的变化

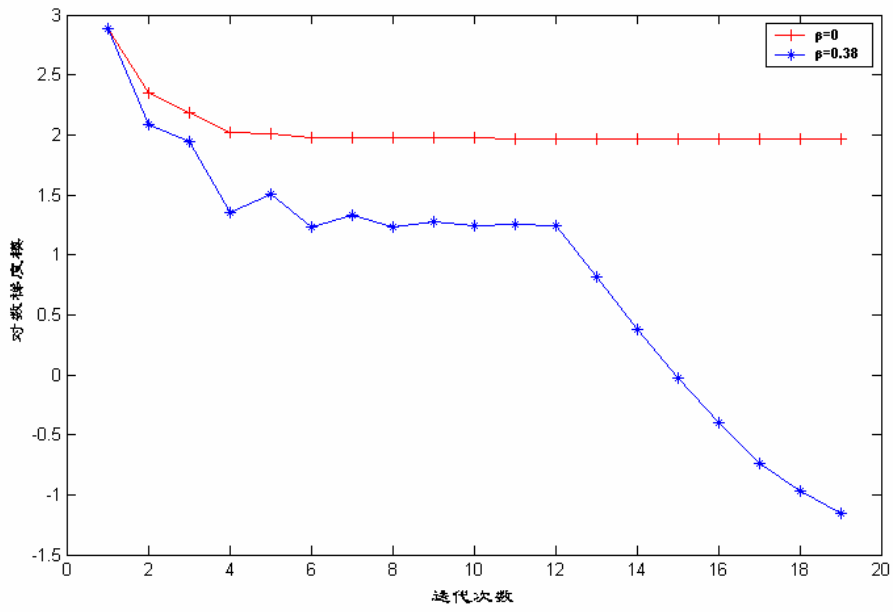


图 4.2 试验一梯度模随迭代的变化

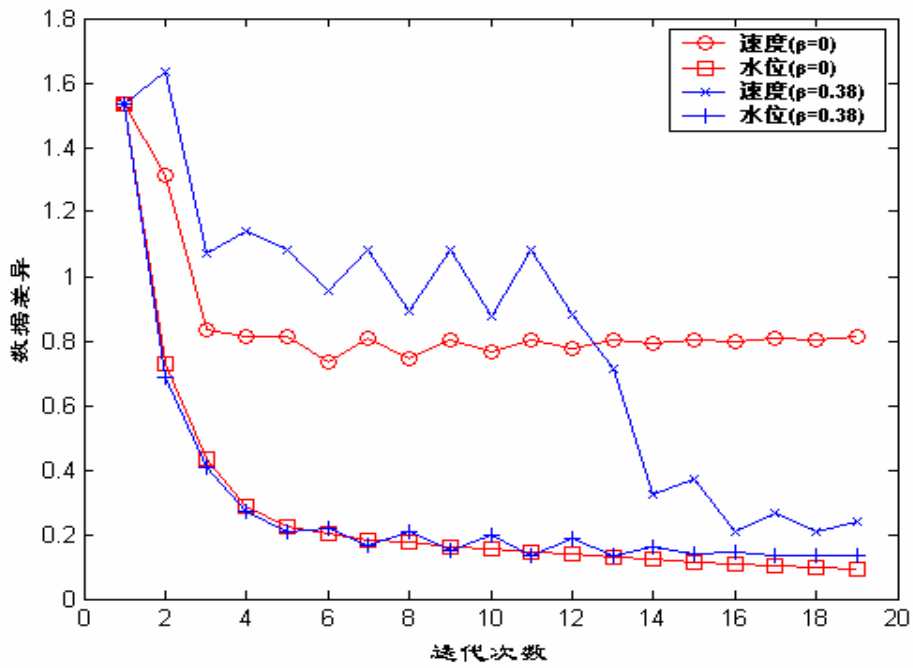


图 4.3 试验一数据差异随迭代的变化

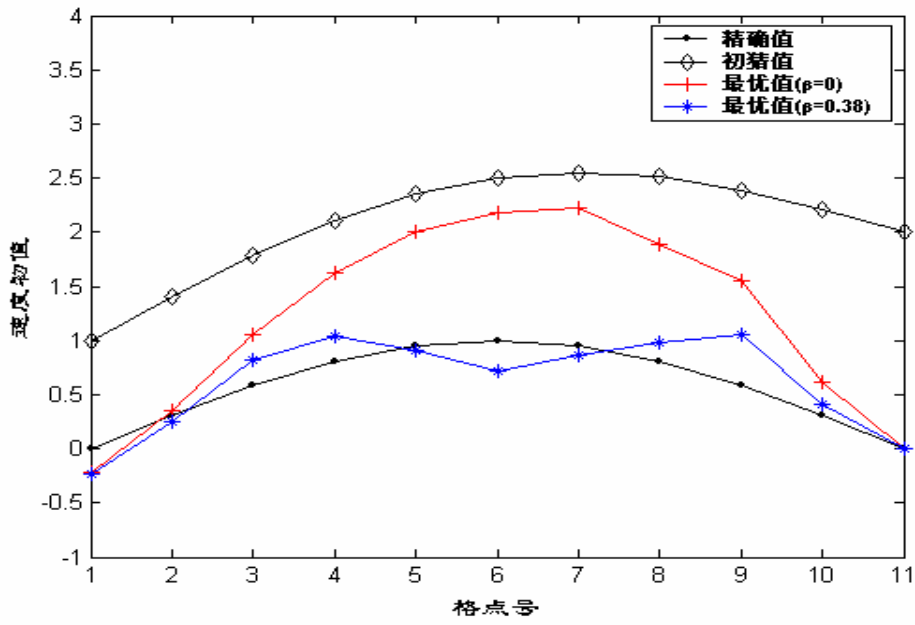


图 4.4 试验一速度初值反演效果

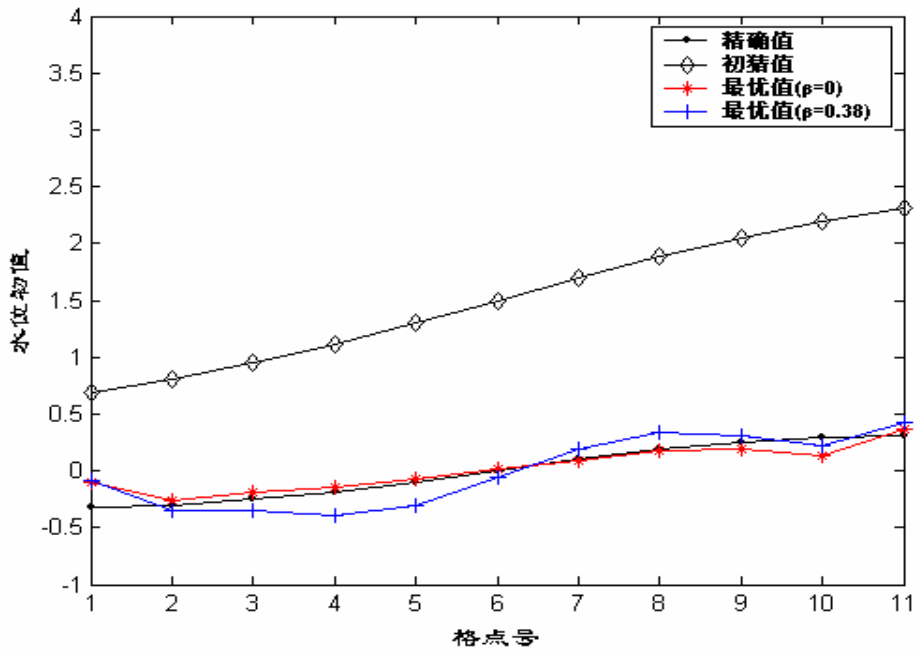


图 4.5 试验一水位初值反演效果

2) 试验二（局部资料下初值反演）

$$w_1(x) = 1.0, w_2(x) = 0$$

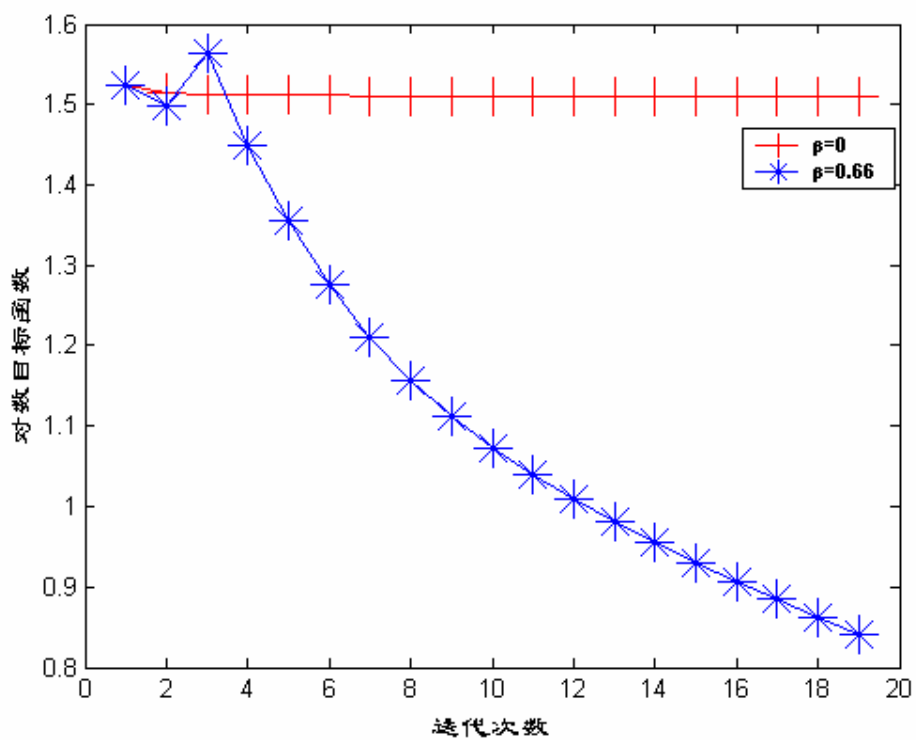


图 4.6 试验二目标函数随迭代的变化

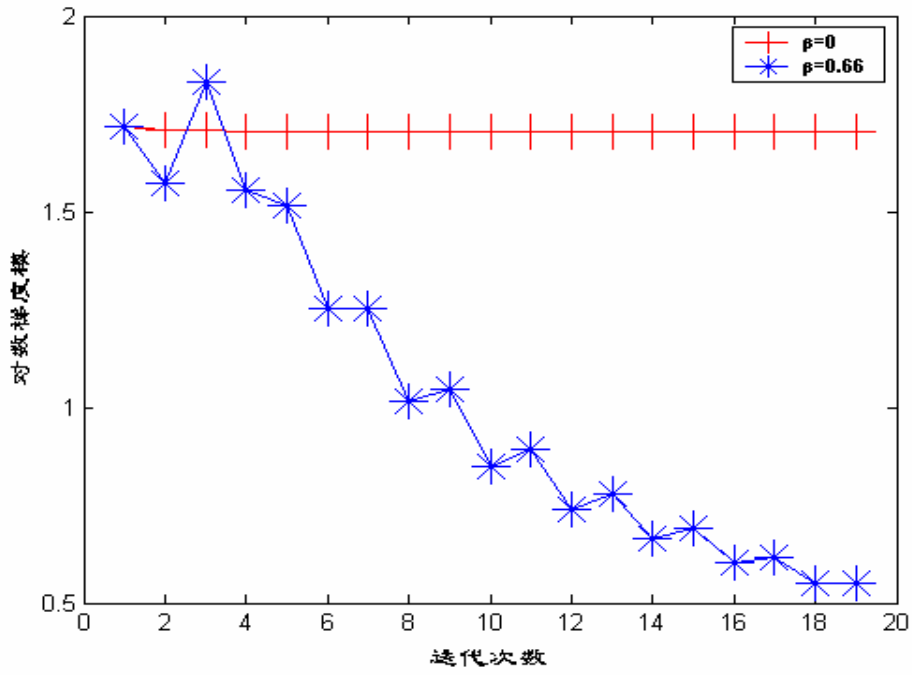


图 4.7 试验二梯度模随迭代的变化

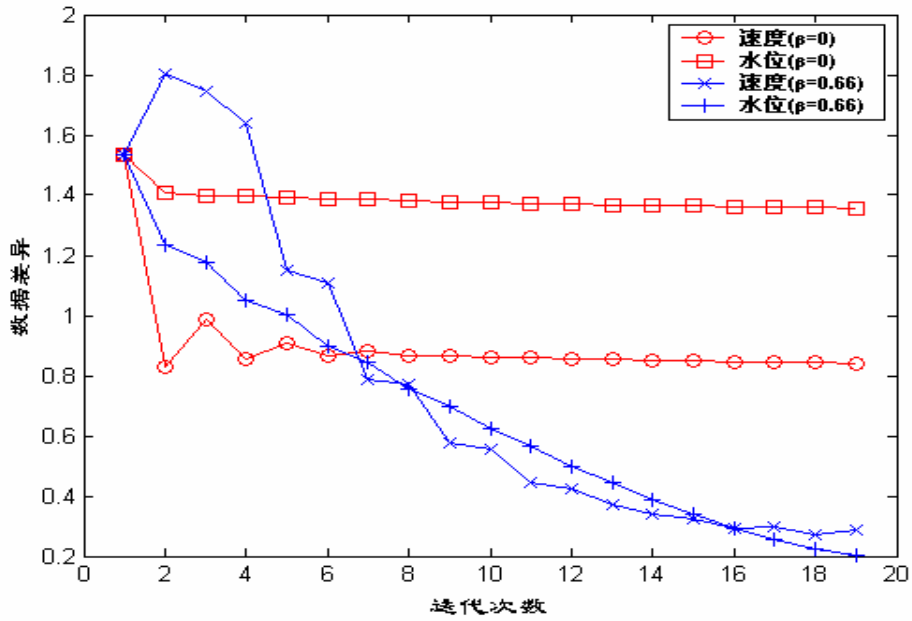


图 4.8 试验二数据差异随迭代的变化

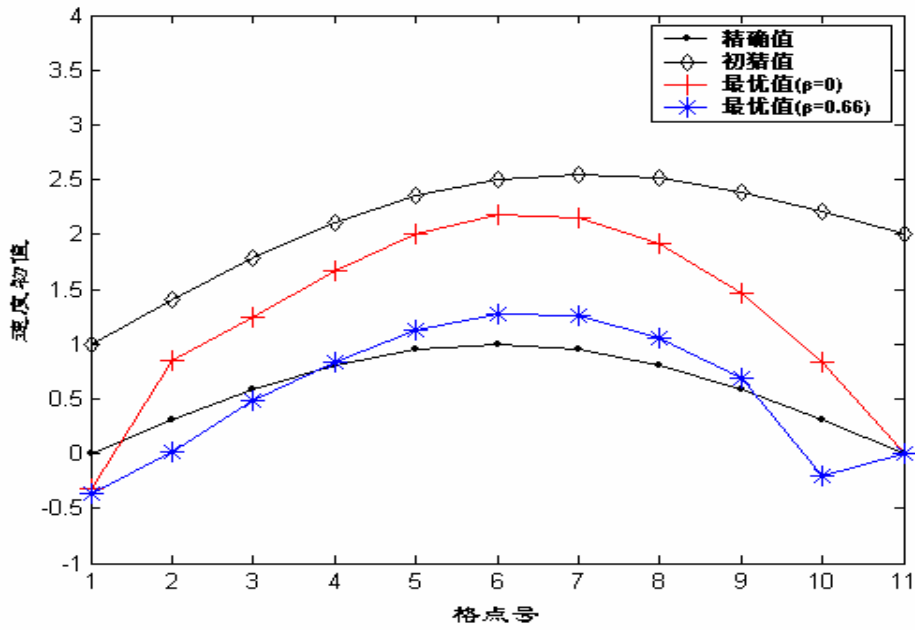


图 4.9 试验二速度初值反演效果

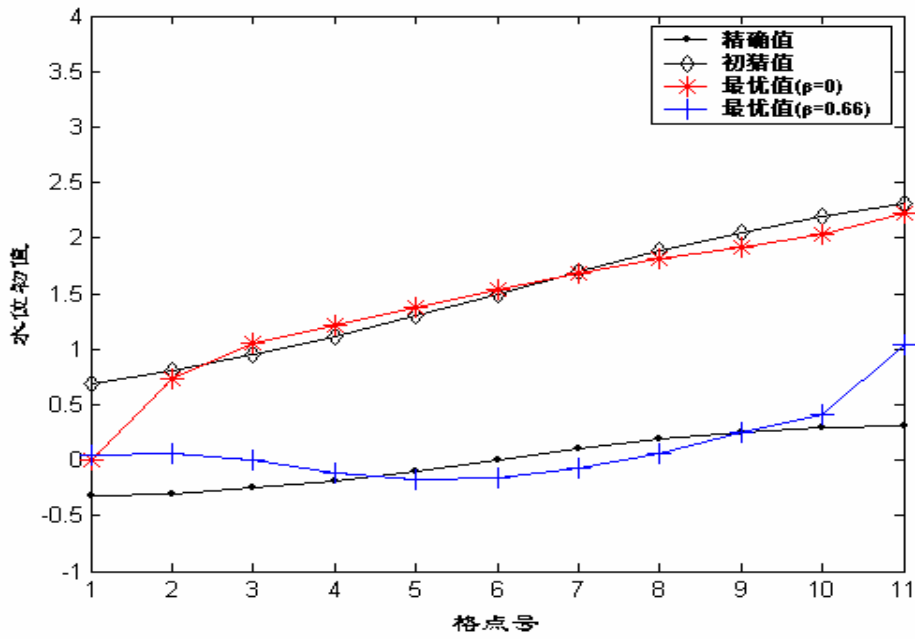


图 4.10 试验二水位初值反演效果

3) 试验三（初值和开边界条件联合反演）

$$w_1(x) = 1.0, w_2(x) = 1.0$$

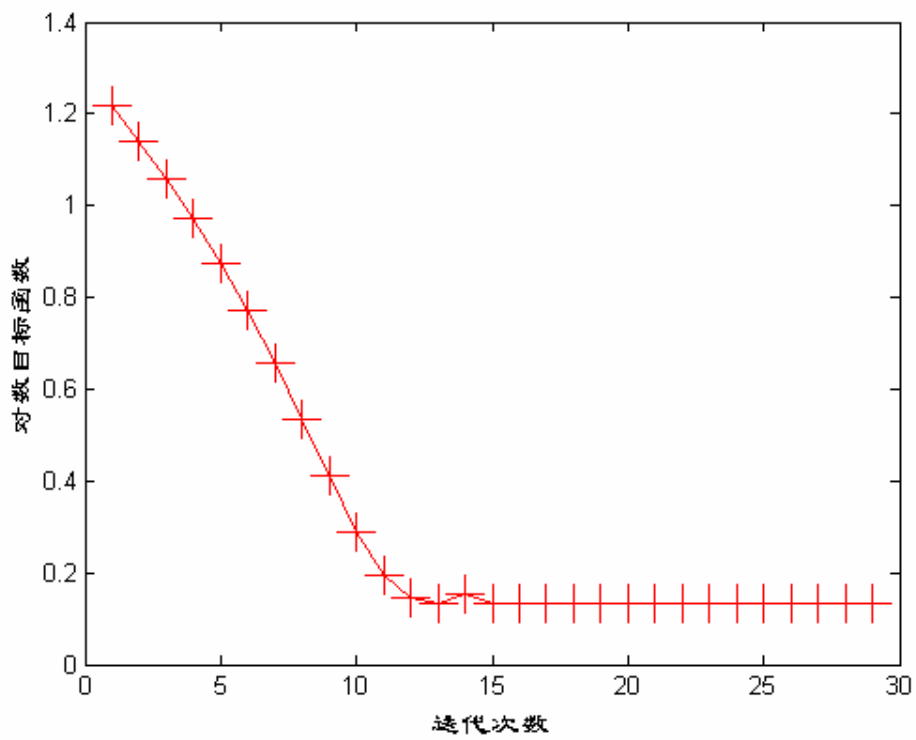


图 4.11 试验三目标函数随迭代的变化

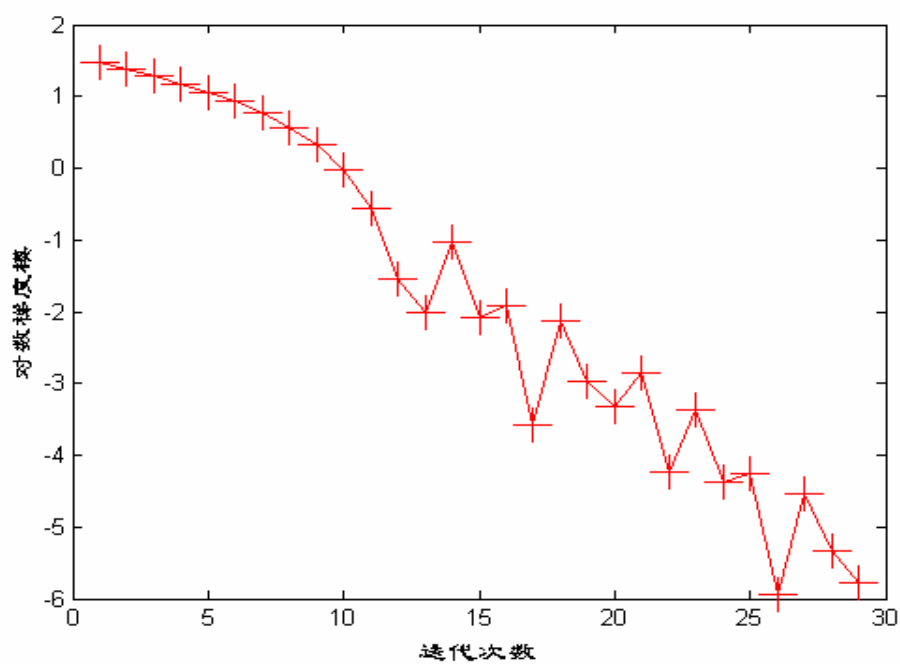


图 4.12 试验三梯度模随迭代的变化

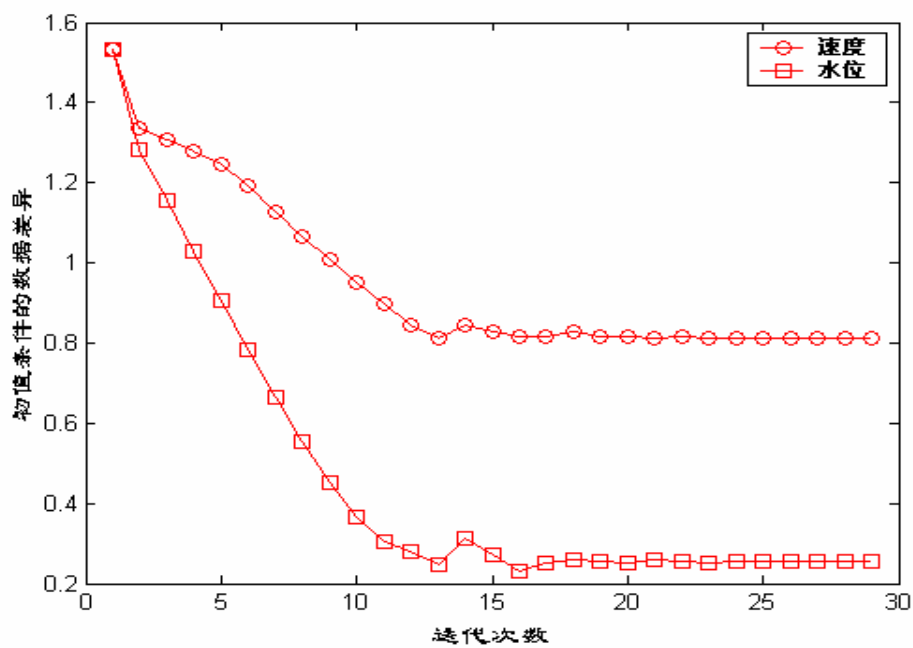


图 4.13 试验三初值数据差异随迭代的变化

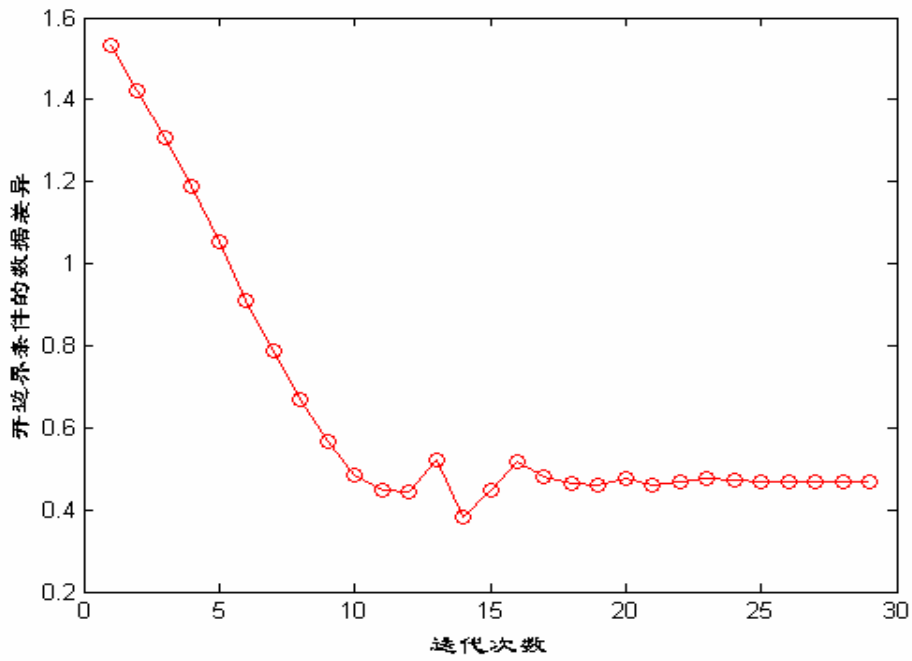


图 4.14 试验三开边界条件数据差异随迭代的变化

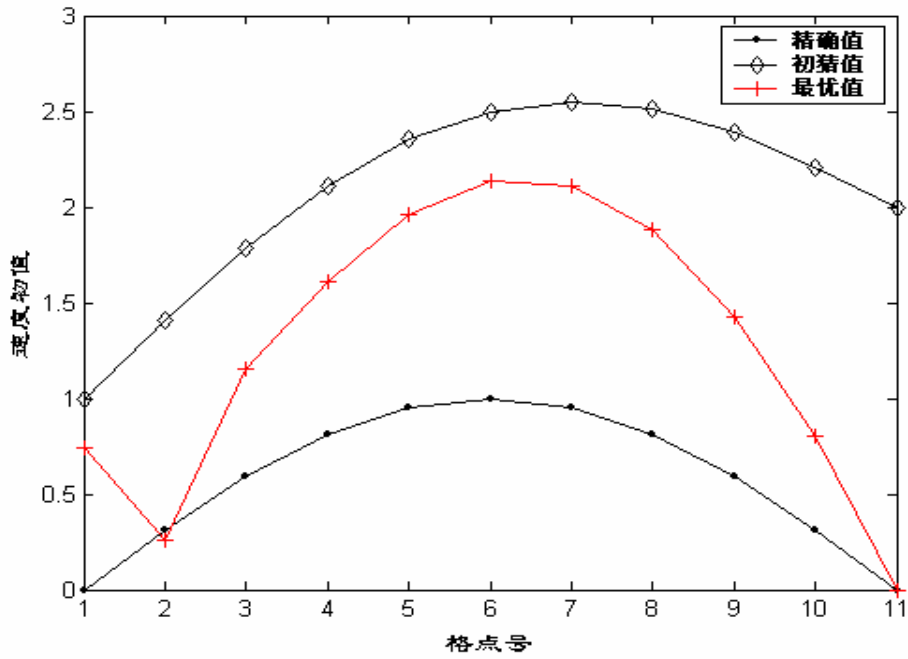


图 4.15 试验三速度初值的反演效果

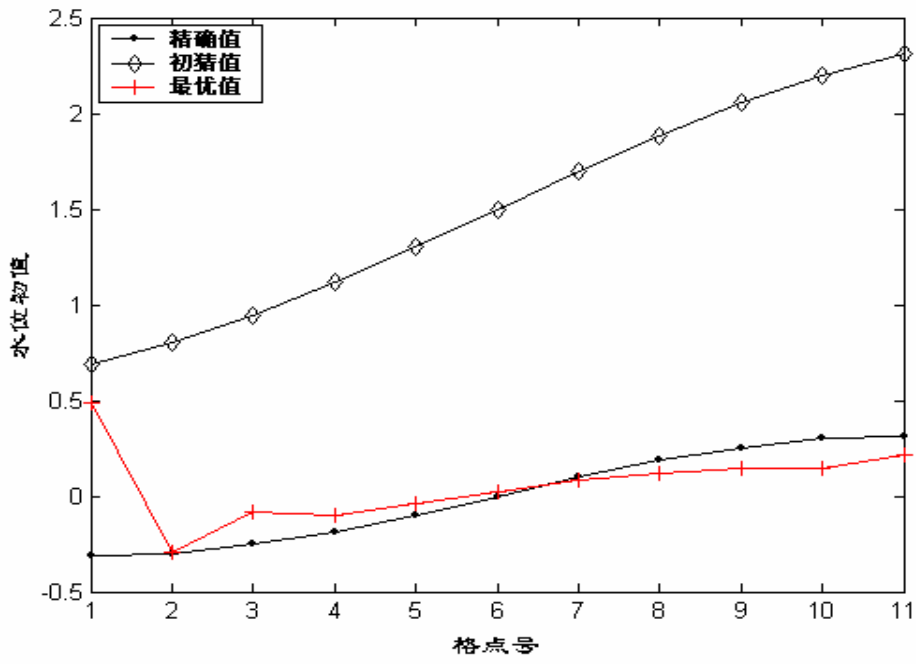


图 4.16 试验三水位初值反演效果

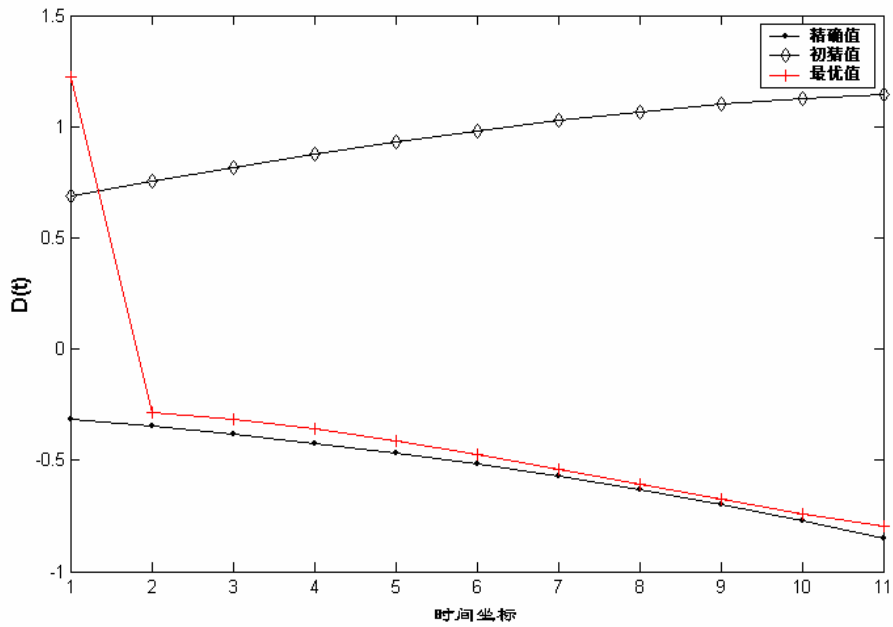


图 4.17 试验三开边界条件反演效果

4) 试验四（初值和底摩擦系数联合反演）

$$w_1(x) = 1.0, w_2(x) = 10.0$$

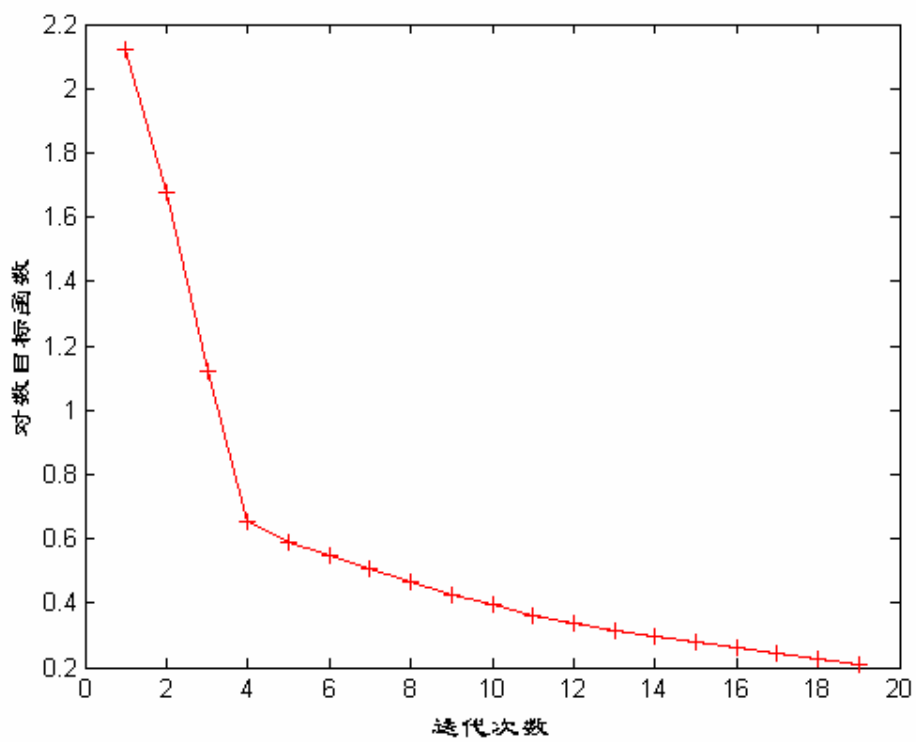


图 4.18 试验四目标函数随迭代的变化

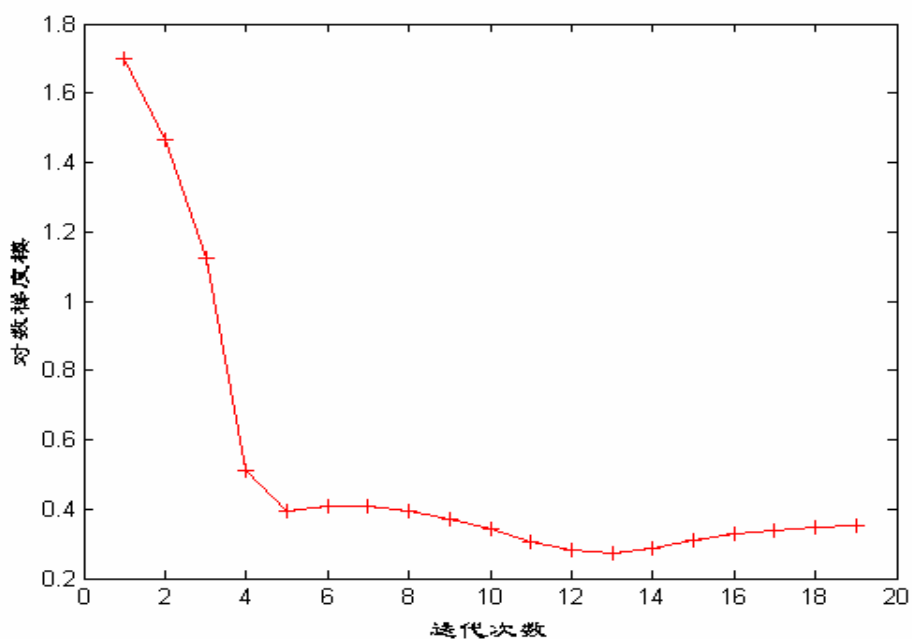


图 4.19 试验四梯度模随迭代的变化

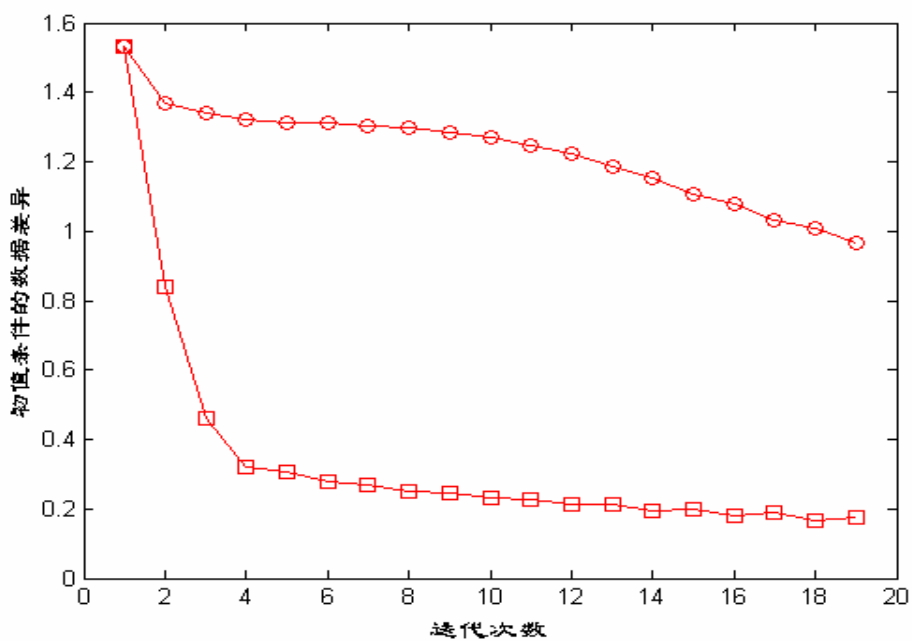


图 4.20 试验四初值数据差异随迭代的变化

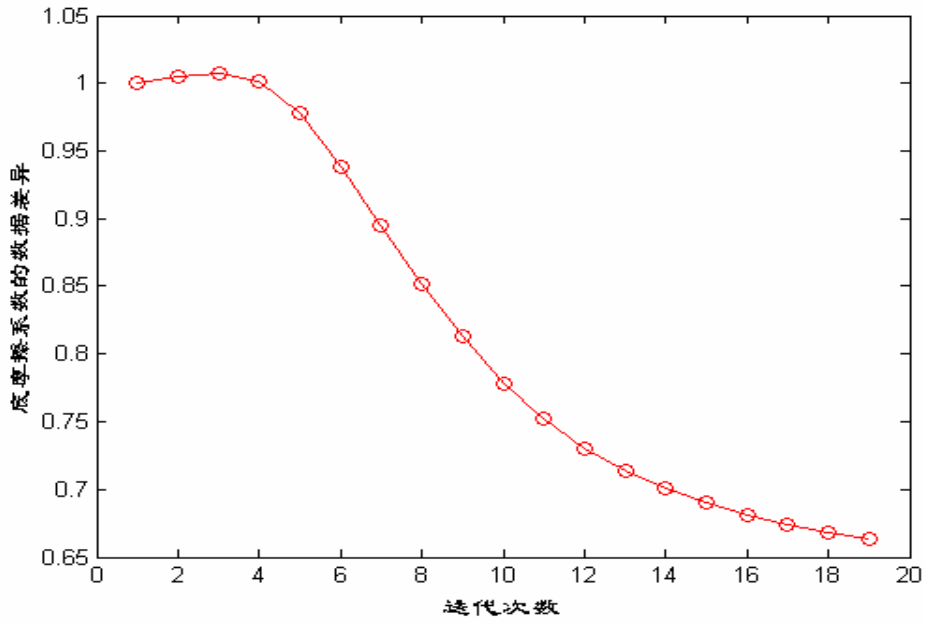


图 4.21 试验四底摩擦系数数据差异随迭代的变化

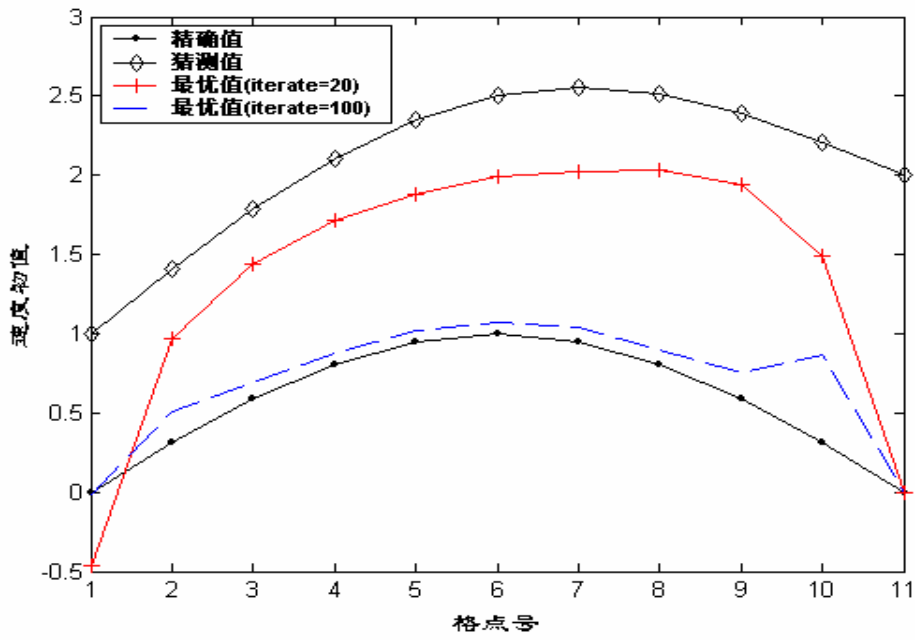


图 4.22 试验四速度初值反演效果

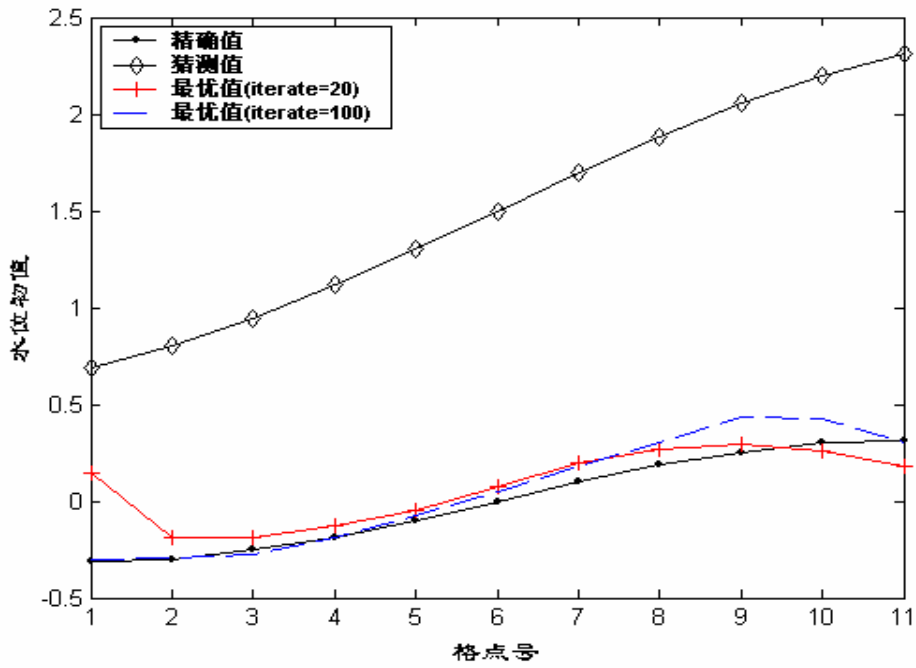


图 4.23 试验四水位初值反演效果

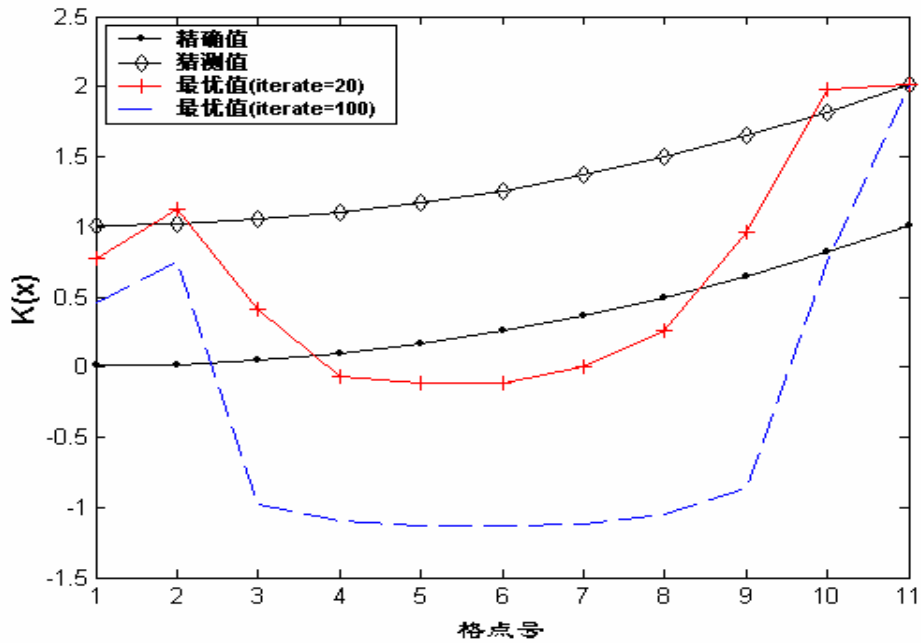


图 4.24 试验四底摩擦系数反演效果

### § 4.3 结果分析

严格地说, 试验一的观测资料并不是整体资料。因为根据权重函数的取值, 在  $x = 1/2$  处, 速度初值的观测资料没有给出, 所以虽然目标函数有了一定程度的下降, 但是速度数据差异的下降和最终的反演效果并不十分地好。而当我们把目标函数中的稳定项考虑进来后, 情形就大不一样了。所有的反演评价指标都同步趋好。

数值试验二的主要目的是想验证正则化方法对局部观测资料下初值反演的改善作用。未考虑正则稳定项作用时, 目标函数、梯度模和数据差异都难以获得有效的下降幅度, 自然最终的反演效果也不理想; 正则稳定项的作用使得计算得以稳定下来 (图 4.6~图 4.8), 目标函数、梯度模和数据差异都呈现稳定的下降趋势, 最终确定的最优初值也比先前更加逼近精确值 (图 4.9~图 4.10)。反演是成功的。

试验三是对初值和开边界条件的联合反演数值试验, 我们开始发现一些奇怪的现象。梯度模的大幅度下降 (图 4.12) 并不意味着每一个反演量的猜测值也都向精确值逼近得很好 (图 4.15)。那么正则稳定项的加入对这个现象是不是有所改观呢? 我们试着做了, 但是本质上并没有多少改变 (由于改善不大, 这里没有给出图示)。对于这个现象最可能的解释是: 正则化方法本质上是对计算不稳定起限制以促其稳定作用, 如果所选取的稳定泛函的形式不恰当, 虽然目标函数和梯度模也能稳步下降, 但是那是一个与原问题有着较大偏离的目标函数极小化问题, 所求的最优解当然不能很好地逼近原问题的精确解。这也告诉我们, 本文中所给出的稳定泛函表达式尽管对局部资料下初值反演效果改善甚佳, 对其它量反演时 (如对开边界条件、底摩擦系数等), 如果要引入正则化方法有必要更新稳定泛函的表达式。这方面的工作正在进行之中, 本文中还没有真正体现出来。

至于数值试验四, 我们想通过试验三那样的方式来使底摩擦系数得到较好的订正效果。结果发现, 虽然可以通过增加迭代步数使得初值的反演效果获得空前的美妙, 但是似乎有牺牲底摩擦系数反演精度的嫌疑。正则化方法没有考虑是源自与数值试验三几乎相同的原因。

根据本文的理论分析, 综合以上几个典型数值试验的结果, 我们可以下

这样的结论：a) 用偏微分方程最优控制中的变分伴随方法来反演数学物理方程定解条件以及方程中的未知参数是可行的；b) 基于一维浅水模式的底摩擦系数反演，在应用伴随方法时要结合一定的解反问题技巧。正则化方法就是其中之一。但是如何合理有效地构造稳定泛函使得所求的正则解逼近真解，并不是一件轻而易举的事。我们发现，对正问题的物理机制有一个深刻的认识，并把这些物理机制通过外加的稳定泛函表现出来，才能真正有效地解决各类数学物理反问题，这也是我们在前面相关章节里所一再提到的一个原则；c) 在局部资料下对初值进行反演时，我们构造的稳定泛函本质上是对整个计算区域内的能量加了一个限制，这样就缩小了解的容许函数类，一定程度上减弱了计算的不稳定性。

## 第 5 章 结论和问题

### § 5.1 结论

经过对外源强迫下一维浅水模式反演问题的理论研究, 根据几个典型数值试验的结果, 我们得到以下几方面的启示和判断:

1) 从数学的观点讲, 本文中的反演问题实际就是从未知反演量空间到已知模式观测值空间的一个映射。另一方面, 由于这个映射一般都不是一一映射, 所以从反问题的角度来说, 问题是不适定的, 而解的不唯一性和不稳定性是这类问题的普遍特征。最优化方法和正则化方法的正是为了力图缓解这两个困难, 通过数值试验一定程度上说明了它们的有效性;

2) 对于本文中定义的目标函数, 要对它进行极小化计算无非就是两种办法: 其一是不计算目标函数对其变量的导数而直接进行迭代计算, 这种办法可操作性强但效率低; 其二是计算一阶甚至是二阶导数的梯度算法。由于相应的目标函数性态非常差(凸性不好、存在多个局部极小点), 如何有效地给出其梯度的计算式就显得尤为重要。伴随方法在充分融和正问题有效信息的基础上圆满解决了这一问题;

3) 用 *Lagrange* 乘子法来推导变分伴随系统, 伴随边界条件不能同时被考虑。本文的理论分析部分详细说明了伴随边界条件是如何被推导出来的, 而且可以看出, 整个变分伴随系统任一方面条件的改变都会直接或间接地使伴随边界条件的表现形式发生某些微妙的改变, 从而影响梯度的计算表达式。我们的理论分析方法使得变分伴随系统真正融和了各种信息, 尤其离散变分伴随分析更加细致地反映出这个特点。

## § 5.2 亟待解决的问题

对于浅水模式反演问题研究本文才只是做了初步的尝试，还有许多有待继续深入研究的方面，现列举如下：

- 1) 如何根据不同的反演问题合理构造正则化方法中的稳定泛函表达式，既使计算收敛加速又能使构造后的目标泛函极小化问题对原问题恰如其分地逼近；
- 2) 考虑非线性平流项的反演问题理论分析和数值方法研究；
- 3) 二维模式理论分析和数值方法的研究；
- 4) 实际资料（噪声干扰）情况下，反演方法的研究；
- 5) 考虑湍动效应的模式反演理论分析和数值方法的研究。

## 在学期间的研究成果

- 1) Pan Xiaoqiang(潘小强), Huang Sixun(黄思训), Variational adjoint method for one-dimensional shallow water model: Theoretical analyses and numerical experiments, Chinese Journal of Atmospheric Sciences, Vol.27, No.3, 2003;
- 2) 参加国家自然科学基金资助项目 (No. 40075014, 40175014) 及上海市重点工程基金资助项目。

## 致 谢

值此论文完成之际，回顾三年来的研究生学习经历，诸多感慨涌上心头，尤其是对那些曾经给我的研究工作以莫大的支持和帮助的人们，心中油然而生感激之情。

我的导师黄思训教授是一位在学术界和军内外都享有盛誉的学者。他严谨务实的治学作风曾经一度深深地影响了我。黄老师在指导我的同时还兼任气象学专业的博士生导师并担任一定的教学和讲学任务，工作异常繁忙，但他依然抽出时间经常对我的论文提出重要的指导性意见，使我少走了不少弯路。在此我深表感谢。

流体力学教研室的吴锤结教授是计算流体力学方面的资深专家，他曾经给我们授过课。不仅如此，吴教授平易近人的态度还使我有更多向他求教的机会。感谢吴教授给我的谆谆教诲。

感谢张铭教授、骆振欧教授、傅强教授、吕美仲教授、魏岗教授、沈锦仁教授、项杰教授以及所有没有提到他们名字的学者和我的老师们，由于得益于他们的指导和教诲才有了今天论文的顺利完成。

感谢研究生管理大队的方大队长和贾政委、研究生 14 队的刘队长和张政委，他们为我在研究生阶段的学习和生活提供了宽松的学习和研究环境。

感谢韩威博士、兰伟仁、杜华栋、曹小群以及王亮、解妍琼、盛飞等同学，他们都曾经给予我帮助。

我的夫人陈霞女士为我分担了大部分的家庭事务，我的岳母为了能照顾好我的孩子花费了大量的心血。可以说没有她们的辛勤劳动和默默奉献，我是难以完成论文的。感谢她们。

感谢学院所有为研究生培养默默工作的人们。

## 参考文献

1. 邓乃扬等, 无约束最优化计算方法 [M], 科学出版社, 1982.
2. 范新岗、丑纪范, 提为反问题的数值预报方法与试验—I.三类反问题及数值解法 [J], 大气科学, 第 23 卷, 第 5 期, 1999.
3. 郭庆平等, 不适定问题研究的若干进展 [J], 武汉理工大学学报(交通科学和工程版), 第 25 卷, 第 1 期, 2001.
4. 韩桂军等, 利用伴随方法优化非线性潮汐模型的开边界条件 [J], 海洋学报, 第 23 卷, 第 2 期, 2001.
5. 黄思训, 伍荣生, 大气科学中的数学物理问题 [M], 气象出版社, 2001.
6. 黄光远、刘小军, 数学物理反问题 [M], 山东科学技术出版社, 1993.
7. J. M. 奥特加, W. C. 莱因博尔特, 朱季纳(译), 多元非线性方程组迭代解法 [M], 科学出版社, 1983.
8. 李德元等, 二维非定常流体力学数值方法 [M], 科学出版社, 1998.
9. 李荣华、冯果忱, 微分方程数值解法 [M], 人民教育出版社, 1980.
10. 李铁军、张平文, 浅水方程近岸行为的数值模拟 [J], 计算数学, 第 23 期, 第 4 卷, 2001.
11. 吕咸青、刘文剑, 数据同化中的伴随方法及其有关问题的研究 [J], 海洋科学, 第 25 卷, 第 3 期, 2001.
12. 吕咸青、方国洪, 渤海开边界潮汐的伴随法反演 [J], 海洋与湖沼, 第 33 卷, 第 2 期, 2002.
13. 吕咸青, 数据同化反演风应力拖曳系数以及垂向涡动黏性系数的分布 [J], 海洋学报, 第 23 卷, 第 1 期, 2001.
14. 马艳、张庆华, 四维资料同化方法的特点分析和发展趋势 [J], 黄渤海海洋, 第 20 卷, 第 1 期, 2002.
15. 王兴宝, 客观分析、四维同化与伴随方法 [J], 解放军理工大学学报, 第 1 卷, 第 2 期, 2000.
16. 朱克云等, 中尺度 MM4 模式及其伴随模式 [J], 成都信息工程学院学报, 第 16 卷, 第 2 期, 2001.
17. 朱江, 曾庆存, 郭冬建等, 利用伴随算子法从岸边潮位站资料估计近岸

- 模式的开边界条件 [J], 中国科学 (D 辑), 27 (5): 462-468, 1997.
18. 叶安乐、李凤歧, 物理海洋学 [M], 青岛海洋大学出版社, 1992.
  19. 袁亚湘、孙文瑜, 最优化理论和方法 [M], 科学出版社, 1999.
  20. Azzeddine SOULAIMANI and Mekki IDRISSE, Identification of the friction coefficient in shallow-water flows using optimal control theory [J].
  21. Bennett A. F., McIntosh P. C., Open ocean modeling as an inverse problem: Tidal theory [J], J. Phys. Oceanog., 12, 1004-1018, 1982.
  22. Courtier P. and Talagrand O., Variational assimilation of meteorological observations with adjoint vorticity equation [J], Q. J. R. Meteor. Soc., 113: 1329-1347, 1987.
  23. Courtier. P. and Talagrand O., Variational assimilation of meteorological observations with the direct and adjoint shallow water equations [J], Tellus (1999), 42A: 531-549.
  24. Charles W. Groetsch, Inverse problems in the mathematical sciences [M], Friedr. Vieweg & Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1993.
  25. Das S. K., Lardner R. W., On the estimation of parameters of hydraulic models by assimilation of periodic tidal data [J], J. Geophys. Res. (Oceans), 96, 15187-15196, 1990.
  26. Das S. K., Lardner R. W., Variational parameter estimation for a two dimensional numerical tidal model [J], Int. J. for Numer. Meth. in Fluids, 15, 313-327, 1992.
  27. F-X. L. Diment, O. Talagrand, Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects [J], Tellus (1986), 38A, 97-110.
  28. Huang Sixun, Han Wei, Application of techniques in inverse problems to variational data assimilation in meteorology and oceanography [R]. International Conference on Inverse Problems, World Scientific Publishing, 2002.
  29. I. M. Navon, Practical and theoretical aspects of adjoint parameter estimation and identifiability in meteorology and oceanography [J], Dyn. Atmos. Oceans, 27, 55-79, 1997.
  30. Lardner R. W., Optimal control of an open boundary conditions for a

- numerical tidal model [J], *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 102: 367-387, 1993.
31. Lardner R. W., Y. Song, Optimal estimation of eddy viscosity and friction coefficients for a quasi-3-dimensional numerical tidal model[J], *Atmosphere-ocean*, 33, 581-611, 1995.
32. Ledimet F. X., Talagrand O., Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects [J], *Tellus*(1986), 38A: 97-110.
33. Lewis J. M., Derber J. C., The use of adjoint equations to solve a variation adjustment problem with advective constraints [J], *Tellus*(1985), 37A: 309-322.
34. Lions, L. J., Optimal control of systems governed by partial differential equations, Springer-Verlag [M], 1971.
35. Lu, William W. Hsieh, Adjoint data assimilation in coupled atmosphere-ocean models: determining model parameters in a simple equatorial model [J], *Q. J. R. Meteorol. Soc.*(1997), 123, pp.2115-2139.
36. Lu, William W. Hsieh, On determining initial conditions and parameters in a simple coupled atmosphere-ocean model by adjoint data assimilation [J], *Tellus*(1998), 50A, 534-544.
37. P. Mewis, K.-P. Holz. Inverse boundary value estimation [J]. *Computational Methods in Water Resources XI*, 1996, Cancun, Volume 2.
38. Pan Xiaoqiang, Huang Sixun, Variational adjoint method for one-dimensional shallow water model: theoretical analyses and numerical experiments, *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* [J], Vol. 27, No. 3, 2003.
39. Panchang V. G., J. J. O'Brien, On the determination of hydraulic model parameters using the strong constraint formulation [J], *Modeling Marine systems*, I, Editor: A. M. Davies, CRC Press, Inc., 5-18, 1989.
40. Provost C., R. Salmon, A variational method for inverting hydrographic data [J], *J. Marine. Sci.*, 44, 1-34, 1986.
41. Richardson J. E., V. G. Panchang, A modified adjoint method for inverse eddy viscosity estimation in coastal circulation models [R], in M. L. Spaulding et al (eds) *Estuarine and Coastal Modeling*, Proc. 2-nd Int. Conf., 1992, Amer. Soc.

- Civil. Engrs., New York, 733-745, 786pp, 1992.
42. Sasaki Y., Numerical variational analysis formulated under the constraints as determined by long-wave equations and a low-pass filter [J], Monthly Weather Review, vol.98, No.12, 1970.
  43. Sasaki Y., Some basic formalisms in numerical variational analysis [J], Monthly Weather Review, vol.98, pp.875-883, 1970.
  44. Seiler U., Estimation of open boundary conditions with the adjoint method [J], J. Geophys. Res., 98: 22855-22870, 1993.
  45. Stauffer D. R., J. Bao, Optimal determination of nudging coefficients using the adjoint equations [J], Tellus, 45A, 358-369, 1993.
  46. Talagrand O., P. Courtier, Variational assimilation of meteorological observations with adjoint vorticity equation, I: theory [J], Q. J. R. Meteor. Soc., vol.113: 1311-1328, 1987.
  47. Tikhonov, A. N., Arsenin, N. Y., Solution of ill-posed problems [M], Washington D. C.: V. H. Winston & Sons, 1977.
  48. Wergen W., The effect of model errors in variational assimilation [J], Tellus, 44A, 297-313, 1992.
  49. Yu L., O'Brien J. J., Variational estimation of the wind stress drag coefficient and the oceanic eddy viscosity profile [J], Journal of Physical Oceanography, 21: 709-719, 1991.
  50. Zhu Keyun, On the 4D variational data assimilation with constraint conditions [J], Advances in Atmospheric Sciences, Vol.18, No.6, 2001.

## 附录：记号索引

### ◇ 基本记号

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{L}{J}, \\ \tau = \frac{T}{N}, \\ x_j = j\sigma \quad (j = 0, 1, \dots, J), \\ t^n = n\tau \quad (n = 0, 1, \dots, N), \\ u_j^n = u(x_j, t^n), \\ h_j^n = h(x_j, t^n), \\ K_j = K(x_j), \\ D^n = D(t^n). \end{array} \right.$$

### ◇ 导出记号

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{gH} \tau / \sigma, \quad p = \sqrt{\frac{g}{H}}, \\ C_1 = \frac{r}{2}, \quad C_2 = \frac{r}{2p}, \quad C_3 = \frac{rq}{2}, \quad C_4 = \frac{\tau}{2p}, \\ C_5 = 1 - r - \frac{\tau K_0}{2}, \quad C_6 = 1 - r, \\ C_7 = -\frac{1 - r - \tau K_0}{2p}, \quad C_8 = \frac{1}{2p}, \\ C_9 = -\frac{\pi HT}{L}, \quad C_{10} = -\frac{\pi T \sqrt{gH}}{L}, \\ C_{11} = \frac{1}{T} + \frac{\pi^2 gHT}{L^2}, \\ q_j = 1 - r - \tau K_j \quad (j = 0, 1, \dots, J-1). \end{array} \right.$$

$$\hat{X} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tilde{X} - X}{\alpha}$$



3)  $2J$  维向量和向量序列

动力模式、扰动模式、切线性模式和伴随模式中要用到的状态变量向量表示形式:

$$\begin{cases} X^n = (h_0^n, u_1^n, h_1^n \cdots, u_{j-1}^n, h_{j-1}^n, h_j^n)^T, \\ \tilde{X}^n = (\tilde{h}_0^n, \tilde{u}_1^n, \tilde{h}_1^n \cdots, \tilde{u}_{j-1}^n, \tilde{h}_{j-1}^n, \tilde{h}_j^n)^T, \\ \hat{X}^n = (\hat{h}_0^n, \hat{u}_1^n, \hat{h}_1^n \cdots, \hat{u}_{j-1}^n, \hat{h}_{j-1}^n, \hat{h}_j^n)^T, \\ W^n = (Q_0^n, P_1^n, Q_1^n, \cdots, P_{j-1}^n, Q_{j-1}^n, Q_j^n)^T, \end{cases}$$

其中,  $(P_j^n, Q_j^n)$  是与离散动力模式状态变量  $(u_j^n, h_j^n)$  对应的离散伴随模式状态变量;

初值梯度向量:

$$GI = (\nabla J(h_0^0), \nabla J(u_1^0), \nabla J(h_1^0), \cdots, \nabla J(u_j^0), \nabla J(h_j^0), \cdots, \nabla J(u_{j-1}^0), \nabla J(h_{j-1}^0), \nabla J(h_j^0))^T;$$

递推关系式中右端向量:

$$B^n = \begin{pmatrix} C_7 D^n + C_8 D^{n+1} - C_4 f_0^n \\ C_1 D^n + \mathcal{F}_1^n \\ C_2 D^n \\ \mathcal{F}_2^n \\ 0 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_j^n \\ 0 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{j-1}^n \\ 0 \\ 2C_4 f_J^n \end{pmatrix}$$

$$(n = 0, 1, \cdots, N-1);$$

$$F^n = \begin{pmatrix} C_4 \hat{K}_0 + C_7 \hat{D}^n + C_8 \hat{D}^{n+1} \\ C_1 \hat{D}^n \\ C_2 \hat{D}^n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(n = 0, 1, \dots, N-1);$$

$$M^n = \sigma \tau \begin{pmatrix} -p(w_1)_0 (u_0^n - \bar{u}_0^n) \\ (w_1)_1 (u_1^n - \bar{u}_1^n) + \beta^2 (u_1^n + ph_1^n - D^n) \\ (w_2)_1 (h_1^n - \bar{h}_1^n) + \beta^2 p(u_1^n + ph_1^n - D^n) \\ \vdots \\ (w_1)_j (u_j^n - \bar{u}_j^n) + \beta^2 (u_j^n + ph_j^n - D^n) \\ (w_2)_j (h_j^n - \bar{h}_j^n) + \beta^2 p(u_j^n + ph_j^n - D^n) \\ \vdots \\ (w_1)_{j-1} (u_{j-1}^n - \bar{u}_{j-1}^n) + \beta^2 (u_{j-1}^n + ph_{j-1}^n - D^n) \\ (w_2)_{j-1} (h_{j-1}^n - \bar{h}_{j-1}^n) + \beta^2 p(u_{j-1}^n + ph_{j-1}^n - D^n) \\ (w_2)_j (h_j^n - \bar{h}_j^n) + \beta^2 p(ph_j^n - D^n) \end{pmatrix}$$

$$(n = 1, 2, \dots, N).$$