自然边界归化与区域分解①

NATURAL BOUNDARY REDUCTION AND DOMAIN DECOMPOSITION

Abstract

The standard technology for solving boundary-value problem is the finite element method. However, for complex problems involving infinite and/or cracked subdomains, reentrant corners, intersecting interfaces, etc, the computing cost could be high. One may conceive an integrated FEM system with coupled BEM. There are many different ways of boundary reduction, the best one seems to be the natural boundary reduction: to delete a troublesome subdomain by using Green function of first kind to get the artificial boundary condition with hyper-singular kernel of Hadamard finite part divergence, seemingly discouraging. The real merits are: 1. The boundary reduction leaves the variational functional invariant, so the coupling between the boundary elements and the remaining well-behaved domain finite elements is direct and natural. 2. The hyper-singularity actually improves stability and effective quadratures are available. Natural boundary reduction can be directly used as a variant of domain decomposition plus deletion and indirectly applied to preconditioning problems.

§1 自然边界归化

解微分方程边值问题的标准技术是有限元方法．可是对无界区域或含断裂及凹角区域的较复杂的问题，有限元方法往往会遇到困难，为了获得必要的精度，必须付出很高的计算代价．既使近年发展迅速的区域分解算法，对无界区域问题也往往无能为力，因为无论怎样划分为子区域，总有一个子区域仍为无界区域．而通过边界归化将微分方程边值问题化为边界上的积分方程然后离散化求解的边界元方法，却有适于处理无界区域及含断裂、凹角区域的优点．

有许多种不同的边界归化途径，从而导致不同的边界元方法．在这些途径中，通过利

① 本文系根据冯康生前撰写的英文摘要由余德浩完成．Jointly with Yu De-hao.

用第一类Green函数及Green公式得到带Hadamard有限部分积分的超奇异积分方程的归化方法看来是最好的一种.作者提出的这一方法完全不同于国际流行的其它方法,它保持了原边值问题的许多特性而且能与有限元方法自然而直接地耦合,从而被称为自然边界归化.由此发展的边界元方法则称为自然边界元方法[1-3,10].

今以边界为Γ_0的无界区域Ω上的Laplace方程的Neumann边值问题为例说明之.边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega \text{ 内}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & \Gamma_0 \text{ 上}, \end{cases} \tag{1}$$

其中g满足相容性条件$\int_{\Gamma_0} g ds = 0$,可以归化为边界上的自然积分方程

$$\mathscr{K} u_0 = g, \tag{2}$$

其中$u_0 = u|_{\Gamma_0}$.由(2)解得u_0后再应用Poisson积分公式

$$u = Pu_0 \tag{3}$$

即可得区域内的解函数.这里$\mathscr{K}$和P分别称为自然积分算子及Poisson积分算子.特别当Ω为半径为R的圆外区域时,自然积分方程及Poisson积分公式有如下简单的表达式[10]:

$$u_n(\theta) = -\frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi} \frac{u_0(\theta')}{\sin^2 \dfrac{\theta - \theta'}{2}} d\theta' \tag{4}$$

及

$$u(r,\theta) = \frac{r^2 - R^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u_0(\theta')}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \theta')} d\theta', \quad r > R. \tag{5}$$

§2 自然边界元与有限元耦合法

尽管边界元方法有降维及适于处理无界及断裂区域的优点,但由于其依赖于基本解或Green函数,有很大的局限性.更好的方法是将边界元法与有限元法相结合.由于有很多种不同的边界元方法,边界元与有限元的耦合法也就有很多种.自然边界元与有限元的耦合法显然是其中最好的一种.[6,8-10]这是因为自然边界归化保持了能量泛函不变量,它与有限元方法的耦合是自然而直接的,而其它类型的边界元与有限元耦合法却不具备这一优点.

仍以边值问题(1)为例.作半径为R的圆周Γ_R包围Γ_0,将Ω分为Γ_R与Γ_0间的有界子区域Ω_1及无界的圆外域Ω_2.设双线性型

$$D(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

$$D_i(u,v) = \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla v dx, \qquad i = 1,2,$$

$$\hat{D}_2(u_R,v_R) = \int_{\Gamma_R} v_R \mathscr{K} u_R ds.$$

于是根据Green公式可得

$$D(u,v) = D_1(u,v) + D_2(u,v)$$

$$= D_1(u,v) + \hat{D}_2(\gamma_R u, \gamma_R u), \tag{6}$$

其中γ_R为$u \to u|_{\Gamma_R}$的迹算子.从而无界区域Ω上的原边值问题(1)等价于有界子区域Ω_1上的如下变分问题:

$$\begin{cases} \text{求} \quad u \in H^1(\Omega_1) \qquad \text{使得} \\ D_1(u,v) + \hat{D}_2(\gamma_R u, \gamma_R v) = \int_{\Gamma_0} gv ds, \forall\ v \in H^1(\Omega_1). \end{cases} \tag{7}$$

对子区域Ω_1作有限元剖分并使其在人工边界Γ_R上的节点与Γ_R的等分点相一致,(7)的离散化便导致自然边界元与有限元耦合法.这样得到的线性代数方程组的系数矩阵恰好是Ω_1上的有限元系数矩阵与圆周Γ_R上的自然边界元系数矩阵的直接迭加.

这一耦合方法在适于用有限元法求解的有界子区域作有限元剖分,而在规则的无界子区域应用自然边界归化,不仅保证了归化得到的边界积分方程与未归化的区域椭圆方程自然地兼容,同时也保证了在计算方法上边界有限元与区域有限元自然地兼容,由此形成一个有限元与边界元兼容并蓄而自然耦合的整体性系统,能够灵活适用于复杂问题,便于分解计算.

§3 人工边界条件及区域删除

上节所述耦合法也可看作一种区域删除方法,即将求解区域分为若干子区域,然后设法删除引起麻烦的子区域而仅在剩下的子区域内求解.简单地删除某个子区域当然会严重影响计算结果.而自然边界归化正是将要删除的子区域上的问题准确地归化到人工边界上.因此有界子区域Ω_1上的变分问题(7)与无界区域Ω上的原问题完全等价.这样的区域删除并不包含任何近似.

变分问题(7)相当于求解Ω_1上的如下边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega_1 \text{内}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & \Gamma_0 \text{上}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \mathscr{K} u, & \Gamma_R \text{上}, \end{cases} \tag{8}$$

其中在人工边界Γ_R上的边界条件是一个积分边界条件.我们也可通过将人工边界上的这一边界条件适当简化,即用其近似微分边界条件来代替,然后再用有限元方法求解之[4,5,7].这样做的好处是将人工边界上满的边界元系数矩阵稀疏化,但由于用近似微分边界条件代替准确的积分边界条件,当然要产生误差.而为提高计算精度使用较高阶的近似微分边界条件则必然增加计算量.尽管如此,这一方法显然比简单删除无界子区域Ω_2要好得多,因为后者实际上是对人工边界上的积分边界条件作了最粗糙的0阶近似.

§4 有限元与自然边界元交替的区域分解算法

由于有限元区域分解算法只适用于有界区域[12],而边界元方法却适于处理无界区域问题,因此为了将区域分解算法推广到无界区域,[11]提出了如下有限元与边界元交替

求解的区域分解算法.这里自然边界元方法又是各种边界元方法中的最佳选择.

仍以无界区域 Ω 上的 Laplace 方程的边值问题为例. 作半径为 R_1 及 R_2 的圆周 Γ_1 及 Γ_2 包围边界 Γ_0,$R_1 > R_2$. 设 Ω_1 为 Γ_0 与 Γ_1 间的有界区域,Ω_2 为 Γ_2 外部的无界区域,$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$,$\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \phi$. Ω_1 可取得较小,Ω_2 则是一个规则的无界区域. 于是原问题分解为两个有重叠部分的子区域上的子问题. 在 Γ_1 上任取初始边界条件,结合 Γ_0 上的已知边界条件,求 解 Ω_1 上的边值问题,得到 Γ_2 上的函数值后再求解 Ω_2 上的问题,又得 Γ_1 上的函数值,再求解 Ω_1 上的问题…… 如此进行Schwarz交替求解. 在有界子区域 Ω_1 上可用标准有限元方法,而在无界子区域 Ω_2 上则可直接应用自然边界归化的已有结果.

上述方法有如下一些优点:

i) 将通常适用于有界区域的区域分解算法推广到无界区域;

ii) 吸取了有限元方法及自然边界元方法的优点而克服了各自的缺点;

iii) Ω_1 可取得较小,从而用有限元法求解的工作量也小,而 Ω_2 尽管为无界区域但已有自然边界归化的结果可直接应用,根本不必求解方程组;

(iv) 应用 Poisson 积分公式由 Γ_2 上的节点值求 Γ_1 上的节点值可以相互独立、完全并行地进行.

理论分析及数值试算表明此算法是收敛的. 只要 R_1/R_2 取得不是太接近 1,收敛得也很快. R_1/R_2 越大,收敛得越快[11].

§5 结 论

自然边界归化的真正的优点在于:

1) 边界归化保持了变分泛函不变量,对引起麻烦的子区域作边界归化得到的边界元与剩下的好区域上的有限元的耦合是自然而直接的;

2) 积分核的超奇异性事实上改善了稳定性而使有效求解成为可能.

自然边界元与有限元耦合法是当前与并行计算相关而兴起的区域分解算法的先驱工作. 应用自然边界归化得到人工边界上的近似边界条件可用于区域删除. 有限元与自然边界元分别在有界子区域及无界子区域进行 Schwarz 交替求解将区域分解算法推广到无界区域. 这些都是自然边界归化对区域分解算法的直接应用. 至于它对预条件问题的间接应用则是今后值得研究的问题.

参考文献

[1] 冯康,论微分与积分方程以及有限与无限元,计算数学,2:1(1980),100-105.

[2] Feng Kang , Yu De-hao, Canonical integral equations of elliptic boundary value problems and their numerical solutions, Proc. of China-France Symp. on FEM, Science Press, Beijing, 1983, 211-252.

[3] Feng Kang, Finite element method and natural boundary reduction, Proc. of the International Congress of Mathematicians, Warszawa, 1983, 1439-1453.

[4] Feng Kang, Asymptotic radiation conditions for reduced wave equation, *J. Comp. Math*, 2:2(1984), 130-138.

[5] Han Hou-de, Wu Xiao-nan, The approximation of the exact boundary conditions at an artifical boundary for linear elastic equations and its application, *Mathematics of Computation*, 59:199(1992), 21-37.

[6] Yu De-hao, Coupling canonical boundary element method with FEM to solve harmonic problem over cracked domain J. Comp. Math, 1 : 3(1983), 195-202.

[7] Yu De-hao, Approximation of boundary conditions at infinity for harmonic equation, *J. Comp. Math*, 3 : 3(1985), 219-227.

[8] Yu De-hao, A direct and natural coupling of BEM and FEM, *Boundary Elements X* Ⅱ, *Computational Mechanics Publications*, *Southampton*, 1991, 995-1004.

[9] 余德浩,无界区域上 Stokes 问题的自然边界元与有限元耦合法,计算数学,14 : 3(1992),371-378.

[10] 余德浩,自然边界元方法的数学理论,科学出版社,1993.

[11] 余德浩,有限元与自然边界元交替的区域分解算法,第 4 届全国工程中的边界元法会议论文集,河海大学出版社,1994,1-5.

[12] 吕涛、石济民、林振宝,区域分解算法,科学出版社,1992.