Kaczmarz 型迭代方法的收敛性分析和效率比较

王璐

摘 要

Kaczmarz 方法是求解大规模相容线性代数方程组的一个经典、简单而又高效的迭代方法，在图像重构与恢复、医学影像学与计算机断层摄影技术以及数字信号处理等领域有着广泛的应用。通过在 Kaczmarz 方法的迭代过程中采用不同的概率准则选取所需要的工作行，我们可以得到不同的 Kaczmarz 型迭代方法；随机 Kaczmarz 方法就是其中的一种重要且很有价值的迭代方法。当线性代数方程组不相容时，为了解决随机 Kaczmarz 方法不收敛的问题，Leventhal 和 Lewis 提出了随机 Gauss-Seidel 方法，之后 Zouzias 和 Freris 又提出了随机扩展 Kaczmarz 方法。为了提高随机 Kaczmarz 方法的收敛速率，Bai 和 Wu 通过引进一个新的行选取策略，提出了贪婪随机 Kaczmarz 方法。将贪婪随机 Kaczmarz 方法进一步运用到等价的增广线性代数方程组，Bai 和 Wu 提出了求解不相容线性代数方程组的贪婪随机增广 Kaczmarz 方法。

在本文中，我们综合分析和细致比较了不同 Kaczmarz 型迭代方法的收敛速率和计算效率，深入讨论了随机 Gauss-Seidel 方法的收敛性质，并提出了两种改进的求解不相容线性代数方程组的随机迭代方法。

首先，根据随机 Gauss-Seidel 方法和随机 Kaczmarz 方法之间的内在联系，并依照随机 Kaczmarz 方法的平均平方误差分析，我们推导出了由随机 Gauss-Seidel 方法所产生的迭代平均平方残量的精确表达式。基于该表达式，我们进一步估计出了随机 Gauss-Seidel 方法的收敛速率上界。理论分析和数值实验均表明，该上界显著地改进了已有上界。另外，我们还将理论结果推广到了更为一般的外推随机 Gauss-Seidel 方法。

第二，通过理论分析和数值实验，我们深入研究了在随机或非随机 Kaczmarz 方法中通常所采用的几种典型的行选取准则，并全面探讨了其对应的 Kaczmarz 型迭代方法的收敛性质和数值表现。对于其中的几种方法，我们给出了其收敛速率更为精确的上界；而对于所有这些 Kaczmarz 型迭代方法，我们揭示出了它们关于平均平方距离和平均平方误差两个方面的比较关系。通过大量计算实验，我们证实了数值结果与理论结果的一致性。

第三，通过引入两组多步迭代参数并在随机扩展 Kaczmarz 方法的每个迭代步中多次更新迭代近似，我们提出了多步随机扩展 Kaczmarz 方法，证明了该方法的收敛性并给出了其收敛速率的上界。在特殊情况下，该上界可以被进一步改进使其小于随机扩展 Kaczmarz 方法的收敛速率上界。数值实验表明，如果合适

地选择多步迭代参数，该多步随机扩展 Kaczmarz 方法在迭代步数和计算时间上均会优于随机扩展 Kaczmarz 方法。

最后，通过在贪婪随机增广 Kaczmarz 方法的概率准则中引入松弛因子，我们得到了一簇松弛贪婪随机增广 Kaczmarz 方法，并估计了其收敛速率。理论分析和数值实验均表明，如果选取合适的松弛因子，该松弛贪婪随机增广 Kaczmarz 方法会比贪婪随机增广 Kaczmarz 方法更为高效。

关键词： 线性代数方程组，Kaczmarz 方法，随机迭代，收敛性质，不相容性