多尺度椭圆问题算法与理论分析的研究

宋思圻

摘要

本文关注多尺度椭圆问题的数值算法和理论分析，它是多尺度领域的一个基本问题。其中既包含对已有经典多尺度方法理论分析的改进和推广；也包括新算法的设计构造、理论分析及数值实验的系统研究。具体可分为以下四个部分。

第一部分讨论具有不同结构系数椭圆均匀化问题的定量理论，其中包括严格周期系数、几乎周期系数、局部周期系数以及分层结构系数。在系数矩阵有界可测的条件下，我们分析了一阶校正项的性质并给出了相应的乘子估计；同时证明了均匀化的一阶逼近在 H^1 范数下的误差估计。

第二部分讨论了求解椭圆均匀化问题相关数值算法的应用。首先，我们利用异质多尺度有限元方法求解具有分层结构系数和几乎周期系数的椭圆问题。我们证明了通过求解单胞问题计算宏观缺失数据的误差估计。其次，给出了基于最小二乘重构的离线-在线算法的收敛性估计。最后我们将该算法用于求解具有分层结构系数、几乎周期系数和随机系数的椭圆方程。

第三部分提出了在非匹配网格上基于 Nitsche 变分原理的多尺度杂交方法，该方法可以同时捕捉全局宏观信息以及多个不规则小区域的微观信息。我们给出了该方法求解有界可测系数二阶椭圆问题的收敛速度。在多种不同形状的局部区域上进行了数值实验，验证了算法的有效性和收敛速度。

第四部分改进了多尺度有限元方法求解椭圆问题的误差估计。我们的理论分析包括了带过采样和不带过采样技巧、周期系数和局部周期系数、二维和三维、方程和方程组情形的 H^1 和 $L^{d/(d-1)}$ 范数下的误差估计。我们的证明无需对系数矩阵的光滑性、均匀化解的正则性进行额外技术性假设。

关键词：多尺度椭圆问题，均匀化定量估计，Nitsche 杂交方法，离线-在线算法，多尺度有限元方法