随机微分方程及其数值方法的密度函数研究

盛德瑞

摘要

随机微分方程精确解的密度函数刻画了方程的概率性质和统计特征，其理论研究和数值逼近在概率位势理论及其相关领域中发挥着重要作用. 本文分别针对一类随机常微分方程(随机 Langevin 方程)和一类抛物型随机偏微分方程(随机热方程)，构造了能够继承原方程密度函数存在性和光滑性的数值方法，建立了数值解密度函数和精确解密度函数之间的误差分析，并给出了收敛阶，从而为定性和定量研究原方程的概率性质和统计特征提供了理论支撑.

对于带多项式增长系数的随机 Langevin 方程，通过证明精确解的指数可积性，得到了精确解密度函数的存在性和光滑性；为数值逼近原方程的密度函数，提出了分裂平均向量场(SAVF)方法，并利用 Bouleau--Hirsch 准则建立了数值解密度函数的存在性；基于 Malliavin 分析理论，证明了数值解密度函数的光滑性；结合所建立的精确解和数值解的指数可积性，首次给出了带多项式增长系数的随机微分方程数值方法密度函数的收敛性分析.

对于可加时空白噪声驱动的随机热方程，通过建立离散比较原理，给出了加速指数 Euler 方法数值解 Malliavin 导数的负矩估计，进而证明了数值解密度函数的存在性和光滑性；基于 Malliavin 分析和 Green 函数的精细估计，得到了精确解和数值解的 Malliavin 导数和 Gâteaux 导数的正则性估计，通过进一步建立数值方法不依赖于测试函数的弱收敛性分析，给出了数值解密度函数的收敛性和收敛阶. 这是随机偏微分方程数值方法密度函数研究的首个结果.

关键字： 随机 Langevin 方程，随机热方程，数值方法，密度函数，收敛阶