变型离散可积系统的研究

刘亚杰

摘要

许多数学领域的最新进展表明，离散系统在各个方面变得越来越重要。离散可积系统不仅与数学的不同分支有密切联系，而且在多个学科领域均有应用。通过引入“三角型双线性算子”，我们提出了一些经典离散可积系统的新的变型方程。它们在双线性 Bäcklund 变换存在的意义下是可积的，因此我们称其为“变型离散可积系统”。本文的研究内容即为利用 Hirota 双线性方法研究这类变型离散可积系统的可积性与可解性，主要包括它们与经典的连续可积系统的联系以及各种解的表示。

根据所研究方程的不同，本文主要分为四部分：变型 Toda 格方程(包括三个变型二维 Toda 格方程和一个变型一维 Toda 格方程)、变型 Hirota–Miwa 方程、变型 Leznov 格方程、变型微分-差分 KP 方程。

我们证明了两个变型二维 Toda 格方程、变型 Hirota–Miwa 方程和变型微分-差分 KP 方程都可以被视为 Kadomtsev–Petviashvili 方程—一个描述具有速度色散的介质中弱非线性波的通用模型—的可积离散。其中 KPI 方程的全离散形式从未在文献中报道过，而变型 Hirota–Miwa 方程可看作 KPI 方程的全离散方程。我们研究了这些方程的可积约化和多种类型的解，得到了孤子、呼吸子、lump 和怪波解的显式和封闭形式，也利用 Riemann theta 函数表示出了这些方程的g-周期波解。据我们所知，这是第一次得到 Toda 型方程的怪波解，包括一维怪波和二维线怪波并且它们均表示为实值有理函数；也是第一次在全离散可积系统中得到 lump 解；并且是第一次利用深度学习数值计算 3-周期波解。最后需要指出，我们的方法也可以用于生成更多变型离散可积系统。

关键词：变型离散可积系统，三角型双线性算子，双线性方法，可积离散，孤立子