格点量子色动力学中的复 Langevin 方法及其稳定性

董晓宇

摘 要

量子色动力学是描述强相互作用的基本理论，格点量子色动力学是系统研究该理论的非微扰方法。在格点量子色动力学中，可观测量的期望用路径积分表示，通常采用蒙特卡洛方法计算，复 Langevin 方法是一种重要的采样方法。本文主要研究了格点量子色动力学中的复 Langevin 方法及其稳定性。该方法将 Langevin 过程由实空间延拓到复空间，用于解决路径积分中的符号问题。但是复 Langevin 方法可能会出现不收敛或无法收敛到正确解的情况，这是由于复 Langevin 过程在时间演化中偏离实空间太远，导致了该方法不稳定。因此，提高复 Langevin 方法的稳定性是本文的工作重点。

首先，gauge cooling 是利用规范场的冗余自由度稳定复 Langevin 过程的标准方法。本文将 gauge cooling 转化成极小化问题，求出了一维周期格点模型的精确解，并研究了 gauge cooling 方法的作用机理。在这种情况下，通过将数值方法连续化，推导出链变量的特征值满足的随机微分方程，从而对 gauge cooling 在复 Langevin 方法中的影响进行解释。具体地，本文通过对 SU(2)中 Polyakov loop 模型进行研究，发现 gauge cooling 将有助于将链矩阵的特征值控制在虚数方向上有界的带状区域内，从而使复 Langevin 过程不会偏离实轴太远。

对于一般的格点模型，本文提出一种新的极小化求解方法——交替下降法，并对其收敛性进行了证明。该方法将链变量分成两组，通过交替求解子极小化问题进行迭代。它在每次迭代中都不包含任何参数，并且子极小化问题可以精确求解。交替下降法比经典的梯度下降法表现出更好的优化效果，尤其当网格尺寸较大时，仍然可以保证稳定的性能。

最后，对于复 Langevin 方程的离散格式，本文证明了 SL(n,$\mathbb{C}$)上的 Euler-Maruyama 格式具有 0.5 阶强收敛阶。进一步地，本文基于随机微分方程的 Ito-Taylor 展开，引入校正矩阵，在非阿贝尔群 SL(n,$\mathbb{C}$)上构造了更高阶的数值格式。为了提高计算效率，通过对导数近似进而构造了 Runge-Kutta 格式。最终的数值实验结果证明这些格式都可以达到理论收敛阶。

关键字：格点量子色动力学，复 Langevin 方法，gauge cooling，高阶数值格式