磁流体和界面问题的有限元方法

张晓迪

摘要

本论文包括两部分内容，第一部分主要研究了界面问题的高阶有限元方法，第二部分主要研究了无感应磁流体方程的有限元方法。

界面问题在科学计算和工程领域中具有广泛的应用。第一部分内容具体包括：

1. 在统一的框架下，提出了对称和非对称两种高阶界面罚有限元方法来求解 H^1–、$\boldsymbol{H}$ (curl)–和 $\boldsymbol{H}$ (div)–界面问题。在分片正则性假设下，证明了不依赖于界面相对于网格位置的能量误差估计和 $\boldsymbol{L}^2$–误差估计。通过数值实验验证了有限元解的最优收敛阶。

2. 对于 Robin 型椭圆界面问题，提出了对称、非对称和不完全三种高阶界面罚有限元方法。在分片正则性假设下，证明了与界面相对于网格位置无关的误差估计。特别地，能量范数的误差还与渐近参数无关。最后，通过数值算例验证了有限元格式的有效性和理论分析的正确性。

磁流体力学 (MHD) 是研究导电流体在磁场作用下运动规律的物理学分支，被广泛应用于液态金属磁泵、聚变反应堆中的液态金属的冷却和铝电解等。第二部分内容具体包括：

1. 针对约化 MHD 问题的混合有限元离散，提出了基于对角 Braess-Sarazin 光滑子的整体多重网格 (MMG) 方法。基于鞍点问题的多重网格方法的抽象分析框架，证明了 MMG 方法关于网格尺寸的一致收敛性。通过数值实验，验证了 MMG 方法关于网格尺寸的拟最优性。针对较大的物理参数，设计了 MMG–预处理的 FGMRES 迭代方法。利用数值算例验证了 MMG–预处理的 FGMRES 迭代方法关于相对大的物理参数的稳健性。

2. 对于无感应 MHD 方程，提出了可以同时保持质量守恒和电荷守恒的有限元方法。利用不动点定理，证明了离散问题的适定性。在较低的正则性假设下，证明了离散解的最优误差估计。特别地，误差估计是压力稳健和电势稳健的，即速度和电流密度的误差与压力和电势无关，压力和电势的误差也相互无关。在此基础上，提出了 Stokes 迭代和 Oseen 迭代两种有限元迭代方法并证明了其稳定性和收敛性。通过数值实验验证了离散格式的质量守恒性和电荷守恒性、误差估计的电势稳健性和压力稳健性、迭代方法的有效性。

关键词：界面问题，无感应磁流体，有限元方法，电荷守恒，误差估计