非标准有限元的局部多水平方法

周雪梅

摘要

自适应有限元方法已成为求解偏微分方程的重要工具，自适应过程中“求解”步骤占据算法高效性的主导地位，因此本文的主要工作是利用已有的自适应网格层信息，设计高效的局部多水平算法求解器，包括通常的多重网格算法和基于空间多水平分裂的预处理法，并应用到二阶和四阶椭圆问题。本文将从算法设计、理论分析和数值实验等方面进行研究，具体可分为如下四个部分。

第一部分研究了二阶椭圆方程 Carey 元离散的自适应算法和局部多水平算法。通过一个新的后验误差估计子得到了 Carey 元的拟正交性，并证明了自适应算法的收敛性和最优性。接着，设计了只需要在当前自适应网格层的新增自由度及其邻近自由度做磨光的局部加性和乘性多水平算法。通过一类网格转移算子构建了稳定的 Carey 元空间分解，并基于 Schwarz 理论得到算法的一致收敛性，即收敛率与网格层数和网格尺寸无关。

第二部分研究了二阶椭圆方程弱有限元离散的局部多水平算法。提出了一类满足逼近性和稳定性的网格转移算子，建立起弱有限元与 P_1 协调元的联系，从而设计出基于自适应网格的弱有限元局部多水平算法，并通过 Schwarz 理论证明了算法的一致收敛性。与传统非协调 V 循环多重网格法相比，本文设计的局部多水平算法仅需一步光滑即可保证算法收敛。

第三部分研究了二阶椭圆方程杂交间断 Galerkin（HDG）方法离散的局部多水平算法。基于两类辅助算子，构建了从粗层 HDG 空间至最细层 HDG 空间的网格转移算子。在 Schwarz 理论框架下，结合 P_1 协调元空间的分解稳定性和网格转移算子的性质证明了 HDG 方法的局部多水平算法是一致收敛的。

第四部分研究了四阶双调和方程矩形 Morley 元离散的局部多水平算法。通过构造满足特殊性质的网格转移算子，建立非协调矩形 Morley 元与协调矩形宏元之间的联系，从而设计了非协调矩形 Morley 元的局部多水平算法，并应用 Schwarz 理论得到了算法的一致收敛性。数值算例验证了算法的有效性。

关键词：自适应有限元方法，多水平算法，椭圆方程，双调和方程，Schwarz 理论，一致收敛性