一类具有小周期性系数的半变分不等式问题的解及数值分析

叶常青

摘要

研究边值问题，特别是复杂边界条件的边值问题，是现代工程和装备的设计、制造和运维阶段的模拟仿真的实际需求。这其中一大类是多体接触问题，特别是复合材料结构的多体接触问题，它们涉及到具有小周期性系数的复杂边界条件的数学建模。对于弹性接触体系的数学建模较为常见的是半变分不等式理论；对于非均质的复合材料体系，其控制方程为具有小周期或随机分布系数的偏微分方程，属于复合材料接触体系的多尺度建模，其数学理论较为困难。

本论文的第一部分主要关注具有小周期性系数和含有不等式边界条件的半变分不等式问题解的渐近分析。重要结果是获得了修正的一阶双尺度近似解逼近于真解的定量估计。对于半变分不等式退化到线性的情形，即线性 Robin 边界条件，利用对偶技巧，证明了真解与均匀化解之间的最优估计。一系列的数值实验表明本文的理论结果是正确的。

对于多尺度问题的数值求解，通用的数值方法有多尺度有限元方法等。在多尺度有限元方法的数值分析中，构造边界校正子是常用的

技巧。然而对于混合边值问题，通常不存在相应的边界校正子的构造方法，因此既有的数值分析结论不适用于混合边值问题。本论文第二部分的主要工作在于利用一阶双尺度渐近展开式的量化估计，统一了对协调和非协调多尺度有限元方法的数值分析；得益于对均匀化解正则性的较低假设和对偶技巧的使用，证明过程更为紧凑和直接。最后，在更广义的 H-收敛意义下，周期性均匀化理论不再适用，本文的结果表明多尺度有限元方法仍有一定的收敛性。

曲线收缩流，顾名思义指一类曲线演化形式，曲线上每一点处的长度单元都是缩短的，其数学模型为一类非线性抛物型偏微分方程。曲线收缩流在理论和应用上都很有意义，其数值方法也很丰富，但理论上证明数值方法的收敛性却很困难。本论文第三部分成果研究了 Dziuk 在 1994 年提出的求解曲线收缩流的全离散线性隐式格式。虽然对于半离散情形收敛性已有相应结果，但对于全离散隐式格式的收敛性和收敛率仍是空白。本文给出了全离散格式的收敛性，并证明有最优的收敛率。数值实验验证了收敛率的正确性，同时展示了数值格式的稳定性。