# p-框架势能极小化及相关问题的研究

徐孜立

## 摘要

p-框架势能极小化问题主要研究单位球面上 p-框架势能达到最小的 N 元点集，其广泛应用于数值逼近和信号处理领域的各个方面，包括压缩感知、量子态层析、数值积分等. 本文主要针对 p-框架势能极小化及相关问题进行研究. 首先，我们针对 N=d+1 这类特殊情形从理论上给出了 p-框架势能极小化问题的最优解，并对最优解的唯一性进行了证明. 其次，本文研究了 p 为偶数以及 p 为正无穷时的 p-框架势能极小化问题，给出了两类具有最小 p-框架势能的集合存在的必要性条件.

首先，我们考虑了 N=d+1 这一特殊情形，给出了 p\in(0,2)时 p-框架势能极小化问题的最优解. 当 N=d+1 时，对任意的 p\geq2，p-框架势能极小化问题的最优解均为正单纯形并且是唯一的，例如当 d=2 时最优解为单位圆内接正三角形的顶点，d=3 时最优解为单位球内接正四面体的顶点. 但是当 p\in(0,2)时，p-框架势能极小化问题的最优解一直都是未知的. Chen 和 Gonzales 等人针对 p\in(0,2)这一情形进行了大量的数值实验，基于实验结果他们猜想一类被称为“嵌入式等角紧框架”的集合是 p-框架势能极小化问题的最优解. 本文对 p\in(0,2)时的 p-框架势能给出了更好的下界估计. 我们不但证实了他们的猜想，而且对最优解的唯一性进行了证明. 结合此前 p\geq2 情形下的相关结果，我们的结果使得 p-框架势能极小化问题在 N=d+1 时得以完整的解决.

其次，针对 p 取值为偶数的情形，本文研究了一类具有最小 p-框架势能的集合的存在性问题. 当 p=2k 是一个偶数时，关于原点对称的球面 p-设计具有最小的 p-框架势能. 球面设计在编码和数值球面积分领域应用广泛，人们最关心的一个问题是球面设计的存在性问题. 针对这一问题，我们给出了新的球面设计存在的必要性条件. 一个集合 X 被称为是 s-距离的，如果 X 内不同向量之间的内积值恰好取 s 个不同的值. 本文对 s-距离的球面设计所包含的向量个数给出了更好的上界估计，改进了此前由 Suda 和 Nozaki 得到的结果. 我们的结果加强了 s-距离集合与球面设计之间的联系，对球面设计的存在性给出了更加精细的刻画，这有助于球面设计的具体构造与数值球面积分问题的求解.

最后，本文考虑了 p=\infty 时的 p-框架势能极小化问题. 当 p=\infty 时，p-框架势能极小化问题等价于最优直线分布问题，即求解单位球面上具有最小列相干性的集合. 这个问题广泛应用于压缩感知、编码等领域. 对这一问题的研究大部分都集中在对列相干性下界的估计上面，其中一个非常有名的下界便是 Levenstein 界. 达到 Levenstein 界的集合与紧球面设计、相互无偏正交基有紧密的联系，它的存在性问题受到人们的广泛关注. 本文给出了达到 Levenstein 界的集合存在的必要性条件. 具体地，我们运用格点理论证明了只有当 d 和 N 满足一定的代数条件时，才有可能存在包含 N 个单位向量的集合达到 Levenstein 界. 此前的相关结果集中在 N=d(d+1)(d+2)/6 这一特殊情形上，而我们的结果可以适用于 N<d(d+1)(d+2)/6 的情形，因此我们对 Levenstein 界取等条件的刻画更加全面和细致，这亦将有助于压缩感知中观测矩阵的构造.

关键字：p-框架势能，球面设计，最优直线分布问题，等角紧框架