高阶通量重构方法的后验子网格限制器与二维混合网格欧拉方程并行求解器

刘世伟

摘要

作为间断有限元（Discontinuous Galerkin, DG）方法的一种简化,通量重构(Flux Reconstruction, FR）方法自 2007 年被提出以来,受到了越来越多的关注。与 DG 方法类似,FR 方法具有局部守恒性和模板紧凑性,可达到任意阶高精度,拥有适合于非结构网格、混合网格、hp 自适应和异构并行计算等优势。和弱形式的 DG 方法不同,FR 方法使用强形式的微分型守恒律方程,省略了 DG 方法中计算代价较高的数值积分,因此计算效率更高。但是由于高精度 FR 方法几乎是一种线性格式,在求解有间断的问题时,常常出现数值振荡,甚至求解失败。为了提高 FR 方法对有间断问题的处理能力,本文发展了 FR 方法的后验子网格有限体积限制器,并借助作者设计的 FR 程序框架,开发了二维混合网格 FR 方法求解欧拉方程的并行求解器。主要工作包含以下三部分:

1. 发展了 FR 方法的一维后验子网格有限体积法限制器。后验限制器比传统的先验限制器更加符合守恒律的离散极大值原理,因此限制条件也更加宽松,通常使用物理允许性和数值允许性作为限制条件。求解时首先使用无限制器的 FR 方法求得候选解,然后使用限制条件对候选解进行问题单元探测。对于没有问题的单元,候选解就是下一时刻的解;对于有问题的单元,使用稳健的子网格有限体积法重新推进问题单元中的解。数值允许性的作用是保证数值解不出现振荡。我们一般采用基于单元均值的离散极大值原理作为数值允许性条件。为了解决光滑极值点附近精度损失问题以及常数区域数值小扰动造成的误判问题,该条件使用了松弛参数。对于五阶及以上精度 FR 格式,数值解可能在单元内部就有振荡,此时我们使用基于子网格均值的松弛离散极大值原理作为数值允许性条件。我们发现,使用上述后验限

制器求解非稳态爆轰问题时工作良好,但求解稳态爆轰问题时,由于子网格方法的数值耗散较大,以及松弛的离散极大值原理对于小扰动的宽容,间断附近的问题单元时间上不是连续标注,而是在 FR 和子网格有限体积格式之间频繁切换。在 Runge 现象的影响下,计算始终无法收敛。为解决该问题,我们使用 KXRCF 激波探测器对数值允许性条件进行了修正。当 KXRCF 间断指示子很大时,说明单元位于间断附近,必须标记;当 KXRCF 间断指示子很小时,说明单元位于光滑区域,无需标记;当 KXRCF 间断指示子取其他中间值情形时,使用松弛的离散极大值原理进行进一步的探测。使用修正的限制器对一维爆轰波进行数值模拟时,对于稳态问题,最大压力曲线能够收敛到参考解;对于非稳态问题,探测器能够对运动的间断面进行连续追踪。计算效率也比修正前显著提高。

2. 给出了二维四边形与三角形混合网格中 FR 方法的子网格有限体积限制器。目前,我们使用只涉及面邻居网格均值的 Barth 限制器作为数值允许性条件。同样地,为了解决光滑极值点附近精度损失和常数区域数值小扰动造成的误判问题,我们在数值允许性条件中也引入了松弛技巧。Barth 限制器的限制器模板为目标单元与面邻居单元,而受限制的变量定义在目标单元的边界通量点上,因此该限制器很容易推广到一般的混合网格上。数值试验表明,使用上述后验子网格限制器的三阶精度 FR 方法,能够同时无振荡的捕捉激波和高分辨的模拟流动细节,而且对于极端的 2000 马赫数天体物理射流问题,也能轻松的完成求解,验证了 FR 方法配合后验子网格限制器的有效性和稳健性。

3. 在求解器研发方面,编写了适用于二、三维混合网格的网格管理、自由度管理、跨单元操作以及统一通信器等个主要的底层基础模块和设计了可扩充的上层框架。在基础模块层之上,对 FR 方法开源求解器 HiFiLES 的主要模块进行了大量重构,开发了二维四边形和三角形混合网格并行 FR 方法欧拉方程求解器。相比于 HiFiLES,新求解器能够轻松支持并行混合网格下任意跨单元操作。此外,更加合理的网格管理与自由度管理,允许我们在未来向求

解器添加自适应网格、曲边网格、动态负载平衡等高级功能。

关键词： 高精度通量重构方法,后验子网格限制器,二维混合网格,并行求解器