随机辛方法优越性的概率机理

金典聪

摘　要

随机辛方法在随机哈密尔顿系统的数值模拟中显示出长时间的数值计算优越性,但迄今为止其优越性机理还没有严格的数学解释.本文分别针对有限维和无穷维的随机哈密尔顿系统,研究数值方法对原系统观测量大偏差原理的保持性,使用大偏差理论揭示随机辛方法优越性的概率机理.

对于有限维随机哈密尔顿系统,本文提出了数值方法渐近保持原系统观测量大偏差原理的概念.通过选取典型的随机哈密尔顿系统--线性随机振子作为测试方程,使用大偏差理论研究随机辛方法优越性的概率机理.基于有限维 Gärtner--Ellis 定理,给出了随机振子精确解及其数值解重要观测量的大偏差原理.证明了随机辛方法渐近保持这些观测量的大偏差原理,而随机非辛方法不具有这一性质.这表明随机辛方法能够很好地近似随机哈密尔顿系统重要观测量击中概率的指数衰减速度.

对于无穷维随机哈密尔顿系统,本文提出了数值方法弱渐近保持原系统观测量大偏差原理的概念.选取随机线性薛定谔方程作为测试方程,研究其精确解和数值解重要观测量的大偏差原理.基于无穷维 Gärtner--Ellis 定理,证明了原方程重要观测量的指数胎紧性,进而在复值平方可积空间中满足大偏差原理.分别针对基于空间 谱 Galerkin 方法的半离散和进一步基于时间方向上一类辛方法的全离散,证明了它们能够弱渐近保持原方程重要观测量的大偏差原理.此外,证明了基于空间谱 Galerkin 方法和时间方向上一类非辛方法的全离散不能弱渐近保持观测量的大偏差原理.

本文结果表明随机辛方法能够保持随机哈密尔顿系统稀有事件概率的渐近行为,首次揭示了随机辛方法优越性的概率机理,并且为逼近随机哈密尔顿系统观测量的大偏差速率函数提供了一个有效的途径.

关键词: 随机哈密尔顿系统, 随机辛方法, 大偏差原理, 速率函数, 渐近保持