Maxwell-Dirac 系统的多尺度算法与有限元分析

付姚姚

摘 要

Maxwell-Dirac 系统及其修正形式在拓扑绝缘体、石墨烯和超导等新型材料电磁光特性分析中有着十分广泛的应用。其数值算法和理论分析也受到广泛的关注。本论文主要研究了 Maxwell-Dirac 系统的多尺度算法和有限元分析。

第一部分研究了 Maxwell-Dirac 系统的多尺度渐近展开方法。第三章针对有界区域 Weyl 规范下具有时-空多尺度 Maxwell-Dirac 系统，提出了该系统解的多尺度渐近展开式，结合时间分裂谱和自适应棱单元方法，发展了一类求解该系统的新型高效算法。第四章的创新点有：一是首次提出了矩阵形式带二次修正项的 Dirac 方程，它是较一般的数学框架，涵盖了上述新型材料体系很多重要的物理模型，具体见附录 C；二是针对上述材料的电磁响应问题，提出了求解有界区域 Weyl 规范下具有周期间断系数矩阵形式带二次修正项 Maxwell-Dirac 系统的多尺度渐近方法，结合 Crank-Nicolson 有限差分方法和自适应棱单元方法，发展了一类多尺度算法。数值试验结果验证了多尺度渐近展开方法的正确性和算法的有效性。

第二部分研究了 Weyl 规范、Lorentz 规范和 Coulomb 规范下的 Maxwell-Dirac 系统的有限元方法和误差估计。第五章针对有界区域 Lorentz 规范下 Maxwell-Dirac 系统，提出了一种 Crank-Nicolson Galerkin 有限元方法，该方法能保持离散系统的质量和能量守恒性，给出了解和能量的误差估计。第六章中，在电荷密度随时间变换比较平缓的假设下，推导了有界区域 Weyl 规范下修正的 Maxwell-Dirac 系统，提出了一种求解该系统的有限元全离散格式，给出了该格式的稳定性估计和有限元误差估计。第七章针对有界区域 Coulomb 规范下的 Maxwell-Dirac 系统，提出了能量守恒的全离散数值格式，给出了该格式的稳定性估计和有限元误差估计。最后，第八章对于具有外加电磁场的非线性 Dirac 方程，提出了一种保持能量守恒的修正 Crank-Nicolson Galerkin 有限元全离散格式。基于截断技巧，给出了该格式的有限元误差估计。数值计算结果很好地吻合了理论结果。

关键字：Maxwell-Dirac 系统，矩阵形式，多尺度渐近方法，Crank-Nicolson Galerkin 有限元方法，误差估计，非线性 Dirac 方程