非线性问题扩展子空间方法的一些研究

党海坤

摘　要

非线性偏微分方程是工程计算领域的一类重要方程，对其高效求解在实际应用中非常重要。有限元方法是求解偏微分方程的一类广泛且重要的数值离散方法，同时多重网格方法是一种高效的数值求解算法。本文主要研究多重网格方法和扩展子空间方法在非线性问题上的应用与扩展。

对于非线性问题中的特征值问题，不同于之前的方法，本文从代数误差的角度分析了扩展子空间算法的收敛速度，给出了协调有限元特征值问题扩展子空间方法一个更高阶的收敛性分析。该分析进一步说明了扩展子空间方法相比于两网格方法的优势，且为粗空间对扩展子空间方法的收敛速度影响提供了新的认识。本文还使用上述思想进一步分析了非协调有限元特征值问题的扩展子空间方法的收敛性，也得到了比已有结果更精细的误差估计。为了消除非协调粗有限元空间的相容性误差，我们使用协调粗有限元空间来构造扩展子空间。通过这些分析，我们发现扩展子空间方法在求解协调有限元和非协调有限元特征值问题的时候，代数误差均有二阶的收敛速度，比已有结论更加精细。同时本文也提供了相应的数值算例来验证上述理论结果。

非线性Poisson-Boltzmann方程（PBE）是用于模拟介质区域中带电体静电相互作用的一类非线性边值问题，同时也是生物化学和生物物理学中最重要的连续模型之一。传统的扩展子空间方法或者多重校正方法都是基于嵌套的网格序列，当计算区域比较复杂或者带有交界曲面时，该方法会受到限制。为了拓展多重校正方法的应用范围，本文提出了一种基于非嵌套网格的扩展子空间方法来求解带交界曲面的非线性Poisson-Boltzmann方程。同时也提供了相应的收敛性分析和数值算例来说明所提出方法的有效性。

关键字: 有限元方法，扩展子空间方法，非线性问题，特征值问题，Poisson-Boltzmann方程。