几类偏微分方程的低次非协调有限元

曾慧兰

摘要

非协调有限元方法作为理论完善且应用广泛的一种数值计算方法, 在固体力学、流体力学、电磁学、热力学、声学等研究领域中备受关注. 本文针对椭圆问题与鞍点问题分别设计了新的低次非协调有限元格式. 本文的研究工作包含如下三个方面.

一、本文提出了一种求解二阶椭圆问题的二次矩形非协调有限元方法, 首次以二次多项式实现了能量范数下的最优收敛精度. 该方法称为减次的矩形 Morley 元（RRM 元）方法. 对于源问题, 证明了 RRM 元在凸区域的均匀网格上的能量范数误差收敛阶为 $\mathcal{O}(h^2)$, 且给出了 L^2 范数误差的下界估计. 对于特征值问题, 证明了矩形 Morley 元和 RRM 元计算所得的特征值均为实际特征值的下界, 且 RRM 元给出的离散特征值更接近于真实值.

二、本文证明了 RRM 元求解四阶椭圆奇异摄动问题时, 为最低次的、最优的、关于摄动参数一致收敛的有限元格式. 构造了一个局部平均的插值算子, 证明了凸或者非凸区域上的 RRM 元空间的最优逼近性. 此外, 本文给出了局部定义的插值算子同时具有投影性质（保持离散空间内所有函数不变）的充分必要条件. 基于该理论, 本文也证明了对 RRM 元空间以及某些常用样条空间而言, 的确不存在局部且投影的插值算子.

三、本文提出了一种求解不可压缩流体方程的 $P_2 - P_1$ 非协调有限元对. 该方法严格守恒, inf-sup 稳定, 且速度空间满足离散 Korn 不等式. 证明了该方法在求解 Stokes 问题时, 具有压力鲁棒的收敛性, 在求解 Darcy–Stokes–Brinkman 问题时, 是关于参数一致收敛的. 比较了新的 $P_2 - P_1$ 非协调有限元对与经典的非守恒型的 Taylor–Hood 有限元对及守恒型的 Scott–Vogelius 有限元对在不可压缩流中的计算效果, 表现了新格式的有效性与鲁棒性.

理论分析与数值模拟均展现了以上新格式应用于不同问题时的优势与潜力.

关键字: 非协调有限元, 椭圆问题, 不可压缩流问题, 误差估计, 严格守恒