Helmholtz 方程的两水平 Schwarz 方法

赵威

摘要

在现代科学计算中，区域分解算法已经成为求解偏微分方程的重要工具。本文的主要工作是利用两水平重叠性区域分解算法求解 Helmholtz 方程，包括算法的设计，收敛率分析以及相关的数值实验。具体可分为下面三部分：

第一部分首先给出了 Sobolev 空间和有限元方法的一些基本知识，然后介绍了经典的两水平加性 Schwarz 方法的构造以及对应的收敛率分析，最后介绍了 GMRES 方法的实现。

第二部分主要研究 Dirichlet 边界下的 Helmholtz 方程，考虑了一种高效的重叠性两水平加性 Schwarz 区域分解算法。首先基于局部正交分解的思想，构造了一种新的“点基”型粗空间，在满足一定合理假设的条件下，证明了加性 Schwarz 预处理系统的收敛率与网格尺寸 h 和波数无关，数值实验表明该理论与实验结果相匹配。

第三部分研究了阻尼边界下 Helmholtz 方程的两水平加性 Schwarz 区域分解算法。首先考虑带有吸收参数项 (ε) 的“shifted Laplace”问题，基于局部正交分解的思想，构造出一种新的“点基”型粗空间，在满足一定合理假设的前提条件下，得到当 $\varepsilon \sim k$ 时，对应预处理系统的收敛率与网格尺寸 h 和波数无关，进一步对 $\varepsilon \sim k$ 时构造的预条件子作用到原 Helmholtz 方程上，数值实验结果表明收敛率与网格尺寸 h 和波数无关。

关键字： 区域分解，Schwarz 方法，Helmholtz 方程，预条件子，收敛率