磁热耦合和磁流体问题的有限元方法

张东航

摘 要

在大型电力变压器的模拟中，涡流损耗和欧姆热会导致能量损耗。磁热耦合模型由麦克斯韦方程和带有热辐射边界条件的热方程组成，它描述了能量从电磁场传输为欧姆热的过程。本文研究了非线性磁热耦合问题的建模和计算，我们提出了一个模拟变压器的约化磁热耦合模型；针对时变非线性磁热耦合问题，我们提出了一个等价的弱解变分形式，并建立了新模型的适定性；对原问题的时间半离散格式，我们进行了误差估计和适定性证明；基于此结果我们提出了一个全离散的有限元格式，并证明了其最优收敛性；为了验证理论结果，我们以国际电磁学会的公开基准问题 Team Wokrshop Problem 21^{b}-MN 为数值算例，验证了新磁热耦合模型的正确性和有限元格式的有效性。

不可压磁流体力学方程组(MHD)描述的是带电流体在磁场作用下的动力学行为。它被应用在核聚变反应器包层、液态金属磁力泵以及电解铝等问题模型中。MHD 方程组是一个多物理场耦合问题：磁场通过洛伦兹力改变流体的流动；相反地，流场的感应电流也会影响磁场。本文研究了稳态不可压磁流体问题的建模和计算，基于约束输运方法，我们提出了一个保持质量、磁通量和电流密度守恒的混合有限元方法；由于新模型的混合有限元近似是非线性问题，我们提出了一个 Picard 类型的线性化方法，并证明了线性化离散问题的适定性以及离散解的收敛性；对线性化方法形成的代数鞍点系统，我们设计了一个增广拉格朗日块预条件子；通过数值实验，我们验证了离散解的收敛性和预处理的求解器对于自由度数目的拟最优性。

关键词:磁热耦合问题，涡流问题，磁流体动力学方程组，约束输运，磁向量势， 混合有限元方法，块预处理