求解变波数Helmholtz方程和时谐Maxwell方程组的新型平面波方法

王泽中

摘要

Helmholtz方程和 Maxwell 方程组是描述波(声波、电磁波)传播和散射的基本模型。平面波方法对求解高频Helmholtz 方程和高频时谐 Maxwell 方程组具有独特的优越性，然而对这类方程变波数情形的平面波方法在文献中还鲜有研究。本文围绕这一课题得到了如下研究成果:

⑴ 对二维变波数 Helmholtz 方程发展了新型平面波方法。其创新性思想是: 把平面波基函数定义为平面波指数函数和多项式幅函数的乘积，该基函数在每个单元上近似满足不带边界条件的齐次 Helmholtz 方程。其中幅函数近似满足不带边界条件的对流扩散方程，并按照几何光学展开的思想来确定以便减少自由度的个数。平面波指数函数中的多项式相函数采用两种不同的方式构造: 通过近似求解 Eikonal 方程得到或者通过求解频率低得多的同波速Helmholtz方程自适应确定。第一种方法几乎没有“波数污染”，特别适用于中高频的情形; 第二种方法可以大大减少自由度的个数，特别适用于特高频的情形。在理论上证明了新型平面波方法比现有相关方法具有更好的收敛性。

⑵ 将以上新型平面波方法（对应于第一种相函数的构造）推广至三维变波数 Helmholtz 方程。此时依然按照几何光学展开的思想来确定幅函数，但需要采用与二维情形不同的构造方式。在理论上证明了这种平面波方法比现有平面波方法具有更好的收敛性且几乎没有“波数污染”。

⑶ 对三维变波数时谐 Maxwell 方程组首次发展了一种新型平面波离散化方法。其主要思想类似于Helmholtz方程的情形，但幅函数是矢量多项式。此时的困难是该矢量幅函数不能按照几何光学展开的思想来确定。本文建立了齐次时谐Maxwell 方程组解析解的新颖渐进展开式，并且基于该渐进展开式构造了期望的矢量幅函数，进而得到了新型平面波基函数。

数值结果表明，本文所提出的方法对于变波数情形是非常高效的。

关键词：Helmholtz方程，时谐Maxwell方程组，新型平面波方法，误差估计，中高频，很高频，渐进展开