# 三维线弹性应变梯度模型的非协调有限元方法

王慧雨

## 摘 要

标准连续介质力学理论不能解决尺度效应和弹塑性材料的不稳定性问题，主要是因为其本构关系中不包含任何反映材料微观特征的内禀参数。应变梯度理论是一种有效刻画尺度效应的模型，它的主要特点是在应变能密度中引进高阶应变，同时在本构关系中引入和材料微观结构有关的长度参数。本文主要针对 Aifantis 等提出的三维线弹性应变梯度模型进行非协调有限元数值求解。

从数学上看，该模型是四阶奇异摄动椭圆偏微分方程组。首先，我们推导了三维 $\mathrm{H}^2-$Korn 不等式及其离散形式，利用这些不等式，证明了方程的连续和离散变分问题的适定性，在此基础上进而构造了一系列 $\mathrm{H}^1$ 协调但 $\mathrm{H}^2$ 非协调的四面体有限元，包括具有 $\mathcal{O}(h)$ 收敛阶的一阶 Specht 元、三维 TRUNC 元和收敛阶为 $\mathcal{O}(h^2)$ 的二阶 Specht 元，其中 $h$ 为网格尺寸。对于一阶 Specht 元，利用三角形上的 Legendre 多项式，我们将二维 Specht 元推广到了三维，构造了相应的正则插值算子和 enriching 算子，从而证明了一阶 Specht 元张量积对应变梯度弹性模型的一致收敛性，并且通过数值实验验证了预测结果，同时，与三维 TRUNC 元张量积的数值结果进行了比较。对于二阶 Specht 元，通过泡函数空间的构造框架，构造了一系列多项式次数为 7 次，自由度个数为 32 个的四面体元，并将其用于求解带有光滑和非光滑源项的双调和方程，并且用二阶 Specht 元的张量积求解应变梯度模型，证明了相应误差估计，数值结果与理论结果一致。

**关键字**: 应变梯度，$\mathrm{H}^2-$Korn 不等式，非协调有限元，Specht 元，TRUNC 元