可积系统与纠错编码的交叉研究

潘焱

摘 要

可积系统, 作为应用数学和数学物理的一个重要分支, 经过许多数学研究工作者们的共同努力, 已形成了较为完整的理论体系, 在流体力学、生物数学、光纤通讯等许多领域有着广泛的应用. 虽然可积系统的应用研究已经有了丰富的文献, 但大多数的研究考虑的仍然在实数域或复数域上的方程, 而纠错编码方面的研究可以看作是有限域上的可积系统在现代通讯领域的一项应用. 可积系统与纠错编码的交叉研究, 既有助于丰富可积系统自身的理论, 又为如何设计有效的译码算法提供了新思路. 本文主要探讨的问题是如何建立可积系统与纠错编码的联系以及如何从可积系统出发设计新的译码算法, 具体工作如下：

我们研究了有限域上的半离散的推广的Lotka-Voltera方程的矩问题(有时也称为hungry Lotka-Volterra方程或者Narita-Itoh-Bogoyavlensky方程), 并设计了与其矩问题有关的多条BCH码和Goppa码的译码算法. 我们首先使用正交多项式出发和合适的演化关系构造出其行列式解和Lax对, 并考虑Lax对中Hessenberg矩阵的预解算子的元素来引入有理函数实现方程的可积线性化. 最后将矩和相应的Stieltjes函数分别与多条BCH码和Goppa码的译码算法中的效验子和错误位置多项式建立联系, 从而证明了多条BCH码和Goppa码的译码算法可以看作方程的矩问题, 可通过Hessenberg型行列式的性质进行迭代求解. 结果表明, 新提出的译码算法在错误位置相同的情况下比多次使用与Toda方程的矩问题相关的译码方法效果好. 然而这个算法需要进行行列式运算, 这导致了算法的高复杂度, 因而我们进一步研究了全离散的hungry Toda方程, 设计迭代型新算法.

对于离散的hungry Toda方程的情况, 我们通过应用正交多项式的谱变换得到迭代型的hungry Toda算法, 并构造多个特征值相同的Hessenberg矩阵. 考虑这多个Hessenberg矩阵的预解算子的第一个元素来引入有理函数. 通过合适的测度将矩和Stieltjes函数分别与多条BCH码和Goppa码的译码算法中的效验子和错误位置多项式联系起来. 相比半离散方程的推广的Lotka-Volterra方程的矩问题推出算法, 我们不需要计算行列式, 因而大大降低了复杂度.

我们的工作的另一方面重点在于mKdV-sine-Gordon方程的三周期波解的数值计算和一个基于mKdV-sine-Gordon方程的可积离散化的模拟方法. 首先我们使用直接方法给出了一个数值过程来计算N周期波解 并给出了三周期波解的数值算例来证明其有效性. 其次, 我们构造了的一个mKdV-sine-Gordon方程的贝克隆变换并推出了一个半离散的方程. 接着, 我们基于半离散的方程设计了一个数值模拟格式, 并用数值结果证明了这个格式是模拟mKdV-sine-Gordon方程的有效方法.

最后我们总结了本文得出的结论并指明了进一步研究的方向.

关键字: 可积系统, 纠错码, BCH码, Goppa码, 正交多项式