深度整流幂次网络的光滑和分片光滑函数逼近

李波

摘 要

近年来以整流线性单元 (ReLU) 作为激活函数的深度神经网络得到广泛应用。已有研究工作证明相比于浅层神经网络，深层 ReLU 网络表达能力更好。然而 ReLU 网络不适合处理对网络函数有光滑性要求的问题。本文研究使用具有高阶光滑性的整流幂次单元 (RePU) 的深层神经网络，来更好地近似光滑函数和分片光滑函数。我们提出了显式构造稀疏连接 RePU 神经网络的最优算法，无近似误差地表示多项式。对于一般的光滑函数，我们首先将其用多项式逼近，然后使用所提出的算法构造相应的多项式幂次网络。从而实现对原函数的高精度网络逼近。我们的构造性算法清楚地表明了谱方法和深层神经网络之间的密切联系。基于对光滑函数的网络近似结果，我们进一步考虑对一些分片光滑函数的 RePU 网络表示和逼近。针对一维问题，我们使用谱元方法中的边界自由度和内部自由度分解技巧构造相应的分片光滑函数网络。对于高维分片光滑问题，我们使用单元分解技巧来构造相应分片光滑函数网络结构，都得到了比 ReLU 网络更优的结果。

我们的分析表明， RePU 深度网络既可以很好的逼近整体光滑函数，亦可以很好的逼近分片光滑函数。我们期望这些分析结果可以促进 RePU 网络在实际问题中的应用。

关键词：深度神经网络，整流线性单元，整流幂次单元，切比雪夫多项式，谱方法，谱元方法